

分类号 _____
学校代码 10487

学号 M202270263
密级 _____

华中科技大学
硕士学位论文

(学术型 专业型)

超导-铁磁系统电磁近邻效应的
理论研究

学位申请人：周熙涵

学科专业：凝聚态物理

指导教师：于涛 教授

答辩日期：2025年4月26日

**A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Master Degree in Science**

**Theoretical Study of Electromagnetic Proximity Effect in
Superconductor-Ferromagnet Heterostructures**

Candidate : ZHOU Xi-Han

Major : Condensed Matter Physics

Supervisor : Prof. YU Tao

Huazhong University of Science and Technology

Wuhan 430074, P. R. China

April, 2025

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中已标明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：周熙涵

日期：2025年5月6日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本论文属于 保 密，在 _____ 年解密后适用本授权书。
 不保密。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：周熙涵

日期：2025年5月6日

指导教师签名：于涛

日期：2025年5月6日

摘要

现代电子信息技术主要依托于片上的半导体技术，其中，电子作为信息传输的载体，我们通过对电子进行有效调控来实现信息的处理。然而，随着晶体管密度的持续攀升，不可规避的焦耳热限制了信息技术的发展。自旋波及其量子形式——磁振子，与电子类似，是极具潜力的信息载体。当自旋波在磁性绝缘体中传播时，由于不存在电荷的移动，因此可以有效地避免焦耳热的产生，然而，由于自旋无法直接与电压耦合，对其进行控制或门控非常困难。因此，如何高效调控磁振子的动力学行为与其输运特性，成为了磁振子学研究的重点。

磁振子与超导库伯对的耦合具有丰富的物理机制和潜在的新颖物理效应，为磁振子动力学的调控打开了新的窗口。过去的研究主要关注于超导-铁磁体异质结构中由于界面上的短程交换相互作用以及自旋-轨道耦合所导致的非常规超导配对。然而，直接接触的超导和磁体由于相互竞争可能会对界面处常规超导电性和磁性产生较大的抑制，并且接触界面的结构往往较为复杂，这些成为制约相关异质结构应用的重要因素。从另一方面来看，超导体与铁磁体通过偶极相互作用所形成的超导-铁磁电磁近邻效应，则无需超导材料与磁性材料直接接触。近期的实验与理论研究均表明，借助电磁近邻相互作用，超导体能够对磁振子的输运方向和路径实现极为有效的调控。在超导-铁磁-超导异质结构中，更是成功实现了超导与磁振子、磁振子与光子之间的超强耦合。这一系列成果在推动未来磁振子集成电路的实现以及利用磁振子开展量子传感等方面取得了重大突破。然而，目前关于上述实验现象的理论解释大多停留在唯象层面，并且缺乏严格的解析计算与清晰的物理图像。因此，从理论层面深入梳理超导-铁磁系统的电磁近邻效应对新型磁子模式的调控机制，对于未来实现片上量子磁子学具有至关重要的意义。

本论文针对铁磁绝缘体-超导异质结构中的电磁近邻效应展开了系统研究，主要结果概括如下：

(1) 从电磁辐射的角度出发，结合理论建模与实验对比，严格考虑超导-铁磁系统中的边界条件，构建了一套通用的求解超导-铁磁系统中电磁场分布以及自旋波本征模式的方法。

华中科技大学硕士学位论文

(2) 针对超导-铁磁双层系统，发现超导可以通过迈斯纳效应反射自旋波产生的磁场，并极大地增加自旋波的传输距离。理论预测，对于由超导氮化铌覆盖的钇铁石榴石薄膜，自旋波的输运得到了近 500% 的显著增强，其衰减长度超过毫米量级。

(3) 超越传统的准静态近似方法，使用完整的方程组阐明了单层铁磁薄膜中铁磁共振的辐射机制，通过探究超导体对辐射电磁波的作用，解释了在超导-铁磁-超导异质结构中铁磁共振频率发生巨大移动，而在超导-铁磁异质结构中频率移动消失的实验现象。

(4) 基于电偶极子和磁偶极子的对偶性，考虑电偶极矩的长程偶极相互作用，将铁磁体中的表面自旋波概念拓展至铁电体中，在理论上首次预测了铁电绝缘体中表面极化波，即表面“铁振子”的存在。由于其强烈的各向异性，表面铁振子可通过激光进行有效地激发，进而形成特殊的空间分布图案；同时，表面铁振子在材料表面外诱导产生手性电场，为铁电材料的微观物理机制研究与应用开发提供了全新视角。

关键词：磁振子；超导；偶极场；电磁近邻相互作用；铁振子

Abstract

Modern information technology is based on on-chip semiconductor technologies, in which the electrons are effectively controlled and treated as information carriers to achieve information processing. However, with the increasing transistor density, the unavoidable Joule heat limits the development of information technology. Spin waves, or their quanta, magnons, are promising information carriers like electrons and could avoid Joule heating in magnetic insulators since they have no electrical charge motion during the propagation process. However, the spin is challenging to gate or control since it does not directly couple to the voltage; therefore, how to effectively regulate the dynamics and transport properties of magnons is the key to developing magnonics.

The coupling between magnons and superconducting Cooper pairs has rich physical mechanisms and potential novel physical effects, providing a new aspect for the regulation of magnon dynamics. Past studies have mainly focused on the unconventional superconducting pairing in superconductor-ferromagnet heterostructures induced by interfacial exchange interactions and spin-orbit coupling at the interface. However, due to the competition caused by the proximity effect between superconductors and magnets, consequently, the conventional superconductivity and magnetism at the interface may be greatly suppressed, and the structure of the contact interface is often complex. These have become important factors restricting the application of related heterostructures. On the other hand, the superconductor-ferromagnet electromagnetic proximity effect formed by the dipolar interaction between the superconductor and the ferromagnet does not require direct contact between the superconducting material and the magnetic material. Recent experimental and theoretical studies have shown that with the help of electromagnetic proximity interaction, the superconductor can effectively regulate the transport of magnons. In the superconductor-ferromagnet-superconductor heterostructure, the ultra-strong coupling between the superconductor and magnons, as well as the coupling between magnons and photons, has been successfully achieved. These series of achievements have made significant progress in realizing future

magnonic integrated circuits and applying magnons in quantum sensing. However, most of the theoretical explanations for the above experimental phenomena remain at the phenomenological level, and there is a lack of strict analytical calculations and clear physical pictures. Therefore, it is of great significance for the future realization of on-chip quantum magnonics to deeply sort out the regulation mechanism of the electromagnetic proximity effect of the superconductor-ferromagnet system on the novel magnon modes from the theoretical level.

This thesis presents a systematic study of the electromagnetic proximity effect in ferromagnetic insulator-superconductor heterostructures, with the main results summarized as follows:

(1) From the perspective of electromagnetic radiation, by combining theoretical modeling with experimental comparison and strictly considering the boundary conditions in the superconductor-ferromagnet system, we propose a general method for solving the electromagnetic field distribution and the eigenmodes of spin waves in the superconductor-ferromagnet system.

(2) For the superconductor-ferromagnet bilayer system, we found that the superconductor can reflect the magnetic field generated by spin waves through the Meissner effect, and greatly enhance the transmission distance of spin waves. Theoretical predictions suggest that for a yttrium iron garnet film covered with superconducting Nb, the transport of spin waves is significantly enhanced by nearly 500%, and its attenuation length exceeds the millimeter scale.

(3) Beyond the traditional quasi-static approximation method, we use the complete set of equations to clarify the radiation mechanism of ferromagnetic resonance in a single-layer ferromagnetic film. By investigating the effect of the superconductor on the radiated electromagnetic waves, we explained the experimental phenomena that in the superconductor-ferromagnet-superconductor heterostructure, there is a large shift in the ferromagnetic resonance frequency, while in the superconductor-ferromagnet heterostructure, the frequency shift disappears.

(4) Based on the duality between electric and magnetic dipoles and by taking the long-range dipole interaction into account, we extended the concept of surface spin waves in

华中科技大学硕士学位论文

ferromagnets to ferroelectrics and first theoretically predicted the existence of surface polarization waves, i.e., “surface ferron” in ferroelectric insulators. On the other hand, such surface modes could be effectively excited by the layer and result in the directional routing due to the strong anisotropy. Moreover, the surface ferron could generate a chiral electric field outside the ferroelectric material, which provides a brand-new perspective for the research on the microscopic physical mechanisms and the development of applications of ferroelectric materials.

Keywords: magnon; superconductor; dipolar field; electromagnetic proximity effect; ferron

目 录

摘 要	I
Abstract	III
1 超导-铁磁系统电磁近邻效应研究现状	
1.1 磁振子	(1)
1.2 超导体的电磁响应	(13)
1.3 超导-铁磁系统电磁近邻效应理论及实验进展	(18)
1.4 本文基本结构	(32)
2 超导调制磁振子输运的研究	
2.1 超导体对磁化辐射场的反射作用	(34)
2.2 受到调制后的自旋波色散、群速度、寿命和椭圆度	(43)
2.3 磁振子传输距离的增强	(45)
2.4 结论	(48)
3 超导调制铁磁体中铁磁共振的研究	
3.1 模型和基本公式	(49)
3.2 单层铁磁绝缘体薄膜	(52)
3.3 超导-铁磁异质结构	(55)
3.4 超导-铁磁绝缘体-超导异质结构	(59)
3.5 本章小结	(71)
4 表面铁振子及其激发	
4.1 模型和基本理论	(73)
4.2 表面铁振子	(75)
4.3 激光导致的定向传输	(78)
5 总结	
5.1 本文主要内容及结论	(81)

华中科技大学硕士学位论文

致 谢	(82)
参考文献	(84)
附录 1 攻读硕士学位期间取得的研究成果	(94)
附录 2 攻读硕士学位期间参与的科研项目	(95)
附录 3 表面铁振子的推导计算	(96)
3.1 特征方程及推导	(96)
3.2 表面模式	(100)
3.3 体模式	(102)
3.4 表面铁振子的激发	(104)
3.5 朗道自由能中的梯度项	(108)

1 超导-铁磁系统电磁近邻效应研究现状

1.1 磁振子

自旋波，或者它的量子化形式，磁振子，可以在不涉及相关电荷运动的情况下实现自旋信息的传输^[1-12]，因此，与电子不同，自旋波的传输不产生焦耳热，从而能够实现更低耗散，更高效率的信息传输和处理^[13-24]，有望在未来实现基于磁子自旋的集成电路。本文主要关注磁性系统的动力学，以及其通过偶极相互作用与超导产生耦合的物理效应。本节首先系统阐述了磁序的基本概念及几种基本的相互作用机制，在此基础上，构建了包含偶极相互作用的铁磁系统哈密顿量，并运用运动方程方法完成该哈密顿量的对角化处理。研究表明，相较于传统对角化方法，此方法能更为高效地推导磁振子模式的归一化条件，同时精准求解其色散关系，有效简化了计算流程。

1.1.1 磁序

磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 是磁学中的基本物理量。从经典物理学的视角来看，磁矩可被视作携带电子的电流环，并且满足 $\boldsymbol{\mu}_l = -|g_L\mu_B|\mathbf{l}$ ，其中 \mathbf{l} 为轨道角动量， g_L 是轨道磁矩的 g 因子， μ_B 是玻尔磁子。然而，根据量子力学，电子自旋的存在产生了一个内禀自旋角动量 \mathbf{s} ，与之对应的自旋磁矩为 $\boldsymbol{\mu}_s = -|g_S\mu_B|\mathbf{s}$ ，其中 g_S 是自旋磁矩的 g 因子。对于电子，当忽略自旋-轨道耦合时， $g_S \approx 2$ 且 $g_L = 1$ ，在这种情况下，总磁矩是轨道磁矩和自旋磁矩的总和^[25]，即

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_s \approx -\mu_B(\mathbf{l} + 2\mathbf{s}). \quad (1.1)$$

本论文主要关注于铁磁体。在晶体内部，磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ 是在介观体积 δV 上平均的磁矩，即 $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \sum_i \boldsymbol{\mu}_i / \delta V$ ，其中下标 i 标记体积 δV 内的第 i 个磁矩。然而，在某些情况下，晶格的晶体场会使电流环发生畸变，进而使轨道磁矩发生淬灭，这样，磁化强度仅由自旋磁矩贡献^[26]，即 $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = -\gamma\hbar\mathbf{S}(\mathbf{r})$ ，其中 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 为自旋密度， $-\gamma = -|g_S\mu_B|/\hbar$ 是电子的旋磁比。

磁矩或者磁化强度可以与各种有效场相互作用，而这些相互作用决定着它们的运动。当我们向晶体施加一个外磁场 $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0$ 时，系统的磁化强度会通过塞曼相

相互作用与该磁场耦合，即

$$H_Z = -\mu_0 \int d\mathbf{r} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_0 = \mu_0 \gamma \hbar \int d\mathbf{r} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_0, \quad (1.2)$$

其中 μ_0 是真空磁导率。当 \mathbf{M} 与 \mathbf{H}_0 平行时，塞曼能达到最小值。

另一方面，库仑相互作用和泡利不相容原理使得晶体中相邻的自旋通过交换耦合相互作用。根据海森堡模型，相邻自旋间由于交换相互作用产生的自由能可由下式表示：

$$H_{\text{ex}} = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j, \quad (1.3)$$

其中， \mathbf{s}_j 表示格点 j 处的电子自旋， $J_{ij} = J_{ji}$ 是格点 i 与格点 j 处自旋之间的对称交换耦合常数。我们假设只有最近邻自旋之间的相互作用是显著的，并且所有近邻的相互作用都相同 ($J_{ij} = J$)，那么第 i 个自旋与其近邻相互作用的总交换能变为 $E_i^{(\text{ex})} \approx -J \sum_j' \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$ ，其中带撇的求和是对 i 的最近邻自旋进行的。这样，总的交换能表示为

$$H_{\text{ex}} = -J \sum_i \sum_j' \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j. \quad (1.4)$$

为了构建长波长磁化涨落的连续介质模型，在傅里叶空间内对交换能进行表述是非常方便的。这里，利用傅里叶变换

$$\mathbf{s}_i = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{s}_{\mathbf{k}}, \quad (1.5)$$

总的交换能变为

$$H_{\text{ex}} = -J \sum_i \sum_j' \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} \mathbf{s}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}'}. \quad (1.6)$$

例如，对于具有六个最近邻的简单立方晶格，该求和变为

$$\begin{aligned} \sum_j' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} &= e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i + a\hat{x})} + e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i - a\hat{x})} + e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i + a\hat{y})} + e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i - a\hat{y})} + e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i + a\hat{z})} + e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i - a\hat{z})} \\ &= 2e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_i} (\cos k'_x a + \cos k'_y a + \cos k'_z a), \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中， a 是两个最近邻自旋之间的距离。将方程 (1.7) 代入方程 (1.4)，总的交换能可

以表示为

$$\begin{aligned} H_{\text{ex}} &= -2J \sum_i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{k}')} (\cos k'_x a + \cos k'_y a + \cos k'_z a) \mathbf{s}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}'} \\ &= -2NJ \sum_{\mathbf{k}} (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a) \mathbf{s}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中, N 是晶格总数。当自旋在距离 a 的尺度上缓慢变化, 且满足关系 $|\mathbf{k}|a \ll 1$ 时, 其色散关系 $\propto (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$, 同样是缓变的, 这样我们就可以将余弦项按 $|\mathbf{k}|a$ 展开至二阶, 即 $\cos k_x a \approx 1 - (k_x a)^2/2$, 由此我们可以得到

$$H_{\text{ex}} = -NJ \sum_{\mathbf{k}} (6 - k^2 a^2) \mathbf{s}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}}. \quad (1.9)$$

更一般地, 对于简单立方、面心立方和体心立方晶格, 设自旋的最近邻数量为 Z , 我们有

$$H_{\text{ex}} = -NJ \sum_{\mathbf{k}} \left(Z - \frac{Zk^2 a^2}{6} \right) \mathbf{s}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}}. \quad (1.10)$$

为了得到连续介质模型中的交换能, 我们进行傅里叶逆变换, 其中 $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ 是 \mathbf{r} 的连续函数, 因此

$$\mathbf{s}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{Na^3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{s}(\mathbf{r}), \quad (1.11)$$

其中, a^3 是每个自旋占据的体积。同时, 将求和 $\sum_{\mathbf{k}}$ 转换为积分, 我们得到 $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V/(2\pi)^3 \int d\mathbf{k} = Na^3/(2\pi)^3 \int d\mathbf{k}$ 。这样, 交换能 (1.9) 的第一项变为

$$-NJZ \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{s}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}} = \frac{-JZ}{a^3(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}') = -NJZ s^2, \quad (1.12)$$

其中, $s^2 = \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r})$ 是自旋的大小, 而第二项为

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \frac{NJZ a^2 k^2}{6} \mathbf{s}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}} &= \frac{-JZ}{6a(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}') (-k^2) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= \frac{-JZ}{6a(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}') \nabla'^2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= \frac{-JZ}{6a} \int d\mathbf{r} \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{s}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

基于此, 我们得出在连续介质模型中, 总交换能的表达式为

$$H_{\text{ex}} = E_0 + \left(\frac{-JZ}{6a} \right) \int d\mathbf{r} \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{s}(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

其中 $E_0 = -JZNs^2$ 。利用关系 $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = s\mathbf{M}(\mathbf{r})/M_s$ ，式(1.14)可以理解为磁化强度与有效磁场 $\mathbf{H}_{\text{ex}}(\mathbf{r})$ 的相互作用，即

$$H_{\text{ex}} = E_0 - \frac{\mu_0}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{\text{ex}}(\mathbf{r}), \quad (1.15)$$

其中 $\mathbf{H}_{\text{ex}}(\mathbf{r}) = \alpha_{\text{ex}} \nabla^2 \mathbf{M}(\mathbf{r})$ ， $\alpha_{\text{ex}} = JZs^2/(3\mu_0 a M_s^2)$ 为交换刚度系数。交换耦合常数满足^[27]

$$J = \frac{3k_b T_c}{2Zs(s+1)}, \quad (1.16)$$

其中， k_b 是玻尔兹曼常量， T_c 是居里温度，由此我们可得到交换刚度

$$\alpha_{\text{ex}} = \frac{k_b T_c s^2}{2s(s+1)\mu_0 M_s^2 a}. \quad (1.17)$$

例如，典型的铁磁材料钇铁石榴石（YIG）具有立方晶体结构，其晶格常数 $A = 1.2 \times 10^{-9} \text{ m}$ 。一个晶胞中有 40 个 Fe^{3+} 离子，它们分为两种类型： Fe^O 和 Fe^T 。即占据 16 个位点的八面体配位的 Fe^O 离子和占据另外 24 个位点的四面体配位的 Fe^T 离子^[28]。因此，单个 Fe^{3+} 离子的体积 $a^3 \approx A^3/40$ 。此外，对于 Fe^{3+} ， $s = 5/2$ 。根据式(1.17)，对于 YIG，取居里温度 $T_c = 559 \text{ K}$ ，且 $\mu_0 M_s = 0.177 \text{ T}$ ^[29]，我们计算得出交换刚度 $\alpha_{\text{ex}} \approx 3.15 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2}$ ，这与文献^[29]中报道的 $\alpha_{\text{ex}} = 3 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2}$ 相近。

相邻自旋之间，不仅存在通过交换耦合所产生的相互作用，同时长程偶极相互作用也会致使相距一定距离的磁矩之间相互耦合。实际上，磁化强度 \mathbf{M} 会产生一个长程分布的偶极磁场，该磁场由麦克斯韦方程组所描述^[30]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mu_0 [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (1.18a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho_f}{\epsilon_r}, \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.18b)$$

其中， $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 是电子的电流， ϵ_r 是取决于材料的介电常数， ρ_f 是电子电荷密度。对于铁磁绝缘体而言， $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$ 且 $\rho_f = 0$ 。对式(1.18b)中的第二个方程取旋度，再将其代入式(1.18a)，我们可以得到由以下方程所描述的杂散磁场 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mu_0 \epsilon_r \partial_t^2 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (1.19)$$

其中，等式右侧的第二项与电磁场的辐射有关^[30] 对于铁磁体中的长波长磁化涨落，

磁化强度及其产生的杂散磁场的变化频率约为几十 GHz，其相应的波长 $\lambda_s \sim 1 \mu\text{m}$ ，由此可得波矢 $k_s \sim 6 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ 。根据式(1.19)，假设 \mathbf{H} 和 \mathbf{M} 处于同一数量级，对于 $\omega \sim 100 \text{ GHz}$ 的情况，空间涨落 $\nabla^2 \mathbf{H} \sim k_s^2 \mathbf{H} \sim 4 \times 10^{13} \mathbf{H}$ 远大于时间导数项 $\mu_0 \varepsilon_r \partial_t^2 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \sim \mu_0 \varepsilon_r \omega^2 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \sim 10^5 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 。因此，在式 (1.19) 中忽略辐射的时间导数项是合理的，此时准静态近似适用。我们注意到，当自旋波的波长与光的波长相近时，即 $k_s^2 \approx (\omega/c)^2 \sim 2.6 \times 10^4 \text{ m}^{-2}$ 时，此时 $\nabla^2 \mathbf{H} \sim \mu_0 \varepsilon_r \partial_t^2 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 。在这种情况下，电磁场的辐射在磁化动力学中起着至关重要的作用^[31]。另一方面，在短波长区域，交换相互作用主导着磁化动力学过程；而在长波长区域，偶极相互作用则起主导作用。

通过准静态近似，磁化强度的涨落产生的杂散磁场（偶极场）遵循方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}), \quad (1.20)$$

该杂散磁场是由磁荷 $\rho_M = \nabla \cdot \mathbf{M}$ 产生的。在准静态近似下，用磁势 $\mathbf{H} = -\nabla\phi$ 来表示杂散磁场是很方便的，我们得到

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (1.21)$$

其解为

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.22)$$

这样，偶极场可以表示为

$$\mathbf{H}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi} \nabla \int d\mathbf{r}' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.23)$$

同时，偶极相互作用对哈密顿量的贡献写为

$$H_{\text{dip}} = -\frac{\mu_0}{2} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1.24)$$

最后，我们注意到，在存在自旋 - 轨道耦合的情况下，磁性中还存在其他重要的相互作用，即由 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用引起的有效场 H_{DM} ^[32,33] 以及由磁晶各向异性引起的有效场 H_{ani} ^[34-36]。

1.1.2 磁振子量子化

我们接下来探讨有序磁性材料中的集体激发，即自旋波，或者其量子形式——磁振子。它们所具有的典型频率范围处于千兆赫兹到太赫兹这一区间内。在此情形下，当存在一个沿 $\hat{\mathbf{z}}$ 方向施加的均匀磁场 $H_0\hat{\mathbf{z}}$ 时，磁化强度会朝着相同的方向发生偏置，并且还会伴随着微小的横向涨落，此时磁化强度可表示为 $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \{M_x(\mathbf{r}), M_y(\mathbf{r}), M_z(\mathbf{r})\}$ ，其中 $M_z(\mathbf{r}) \approx M_s \gg M_{x,y}(\mathbf{r})$ ， M_s 为铁磁体的饱和磁化强度。对于铁磁体，磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ 与自旋算符 $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})$ 通过 $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = -|\gamma|\hbar\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})$ 相关联，其中 $-|\gamma|$ 是电子的旋磁比。因此，自旋方向与磁化强度方向相反，其 z 分量沿 $-\hat{\mathbf{z}}$ 方向。

为了在连续介质模型中对自旋波进行量子化，我们首先采用霍尔斯坦 - 普里马科夫变换 (Holstein-Primakoff transformation) [37] 利用玻色算符 $\hat{b}(\mathbf{r})$ 来表示自旋算符。在线性响应区域，其表达式为

$$\begin{aligned}\hat{S}_+(\mathbf{r}) &= \hat{S}_x(\mathbf{r}) + i\hat{S}_y(\mathbf{r}) = \hat{b}^\dagger(\mathbf{r})\sqrt{2S - \hat{b}^\dagger(\mathbf{r})\hat{b}(\mathbf{r})} \approx \sqrt{2S}\hat{b}^\dagger(\mathbf{r}), \\ \hat{S}_-(\mathbf{r}) &= \hat{S}_x(\mathbf{r}) - i\hat{S}_y(\mathbf{r}) = \sqrt{2S - \hat{b}^\dagger(\mathbf{r})\hat{b}(\mathbf{r})}\hat{b}(\mathbf{r}) \approx \sqrt{2S}\hat{b}(\mathbf{r}), \\ \hat{S}_z(\mathbf{r}) &= -S + \hat{b}^\dagger(\mathbf{r})\hat{b}(\mathbf{r}) \approx -S,\end{aligned}\tag{1.25}$$

其中 $S = M_s/(\gamma\hbar)$ 。我们假设 $\hat{b}(\mathbf{r})$ 可以用玻色磁振子湮灭算符 \hat{m}_p 和产生算符 \hat{m}_p^\dagger 展开，其中为“ p ”的磁振子模式，即

$$\begin{aligned}\hat{b}(\mathbf{r}) &= \sum_p (A_p(\mathbf{r})\hat{m}_p + B_p(\mathbf{r})\hat{m}_p^\dagger), \\ \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}) &= \sum_p (A_p^*(\mathbf{r})\hat{m}_p^\dagger + B_p^*(\mathbf{r})\hat{m}_p),\end{aligned}\tag{1.26}$$

其中， $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 分别是湮灭算符 \hat{m}_p 和产生算符 \hat{m}_p^\dagger 的振幅。因此，根据式 (1.25)，自旋算可以写为

$$\begin{aligned}\hat{S}_x(\mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{2S}}{2} \sum_p ((A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))\hat{m}_p + \text{H.c.}), \\ \hat{S}_y(\mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{2S}}{2} \sum_p (i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}))\hat{m}_p + \text{H.c.}).\end{aligned}\tag{1.27}$$

其混合了磁振子湮灭算符和产生算符，这样， $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 的正交归一条件与光子和声子的不同，如下所示。首先，算符 $\hat{b}(\mathbf{r})$ 的玻色子特性导致了 $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 的

两个关系，即

$$\begin{aligned}
 [\hat{b}(\mathbf{r}), \hat{b}^\dagger(\mathbf{r}')] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
 &\rightarrow \sum_p [A_p(\mathbf{r})A_p^*(\mathbf{r}') - B_p(\mathbf{r})B_p^*(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\
 [\hat{b}(\mathbf{r}), \hat{b}(\mathbf{r}')] &= 0 \\
 &\rightarrow \sum_p [A_p(\mathbf{r})B_p(\mathbf{r}') - B_p(\mathbf{r})A_p(\mathbf{r}')] = 0.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

例如，我们考虑一个典型的自旋哈密顿量，它由磁化强度与外磁场 $H_0\hat{\mathbf{z}}$ 的塞曼耦合、交换相互作用以及偶极相互作用组成，其表达式为

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= -\mu_0 \int d\mathbf{r} \hat{M}_z(\mathbf{r})H_0 - \frac{\mu_0}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{H}_{\text{ex}}(\hat{\mathbf{M}}, \mathbf{r}) + \mathbf{H}_{\text{dip}}(\hat{\mathbf{M}}, \mathbf{r})) \\
 &= \mu_0\gamma\hbar \int d\mathbf{r} \hat{S}_z(\mathbf{r})H_0 - \frac{\mu_0(\gamma\hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{H}_{\text{ex}}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) + \mathbf{H}_{\text{dip}}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r})),
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中，交换场 $\mathbf{H}_{\text{ex}}(\hat{\mathbf{M}}, \mathbf{r}) = \alpha_{\text{ex}}\nabla^2\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})$ ，而偶极场

$$\mathbf{H}_{\text{dip}}(\hat{\mathbf{M}}, \mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi}\nabla \int d\mathbf{r}' \frac{\nabla' \cdot \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1.30}$$

由式 (1.23) 给出，且包含磁标势 [式(1.22)]。根据磁化强度 \mathbf{M} 的运动方程，我们可以将哈密顿量对角化，并给出模式“波函数” $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 的归一化条件。

我们关注饱和磁化强度均匀的磁性样品，如磁性薄膜、磁球、磁椭球和磁圆柱^[38-40]，对于具有哈密顿量 (1.29) 的这些样品而言，这意味着样品内部的静态偶极场始终与饱和磁化强度的方向相同，因为如果不这样的话，饱和磁化强度会围绕静态偶极场进动。在这种情况下，平衡自旋分布

$$S_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} S, & \mathbf{r} \in \text{样品内}, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \text{样品内}, \end{cases} \tag{1.31}$$

根据海森堡运动方程，从哈密顿量 (1.29) 出发，我们得到 $\hat{S}_x(\mathbf{r})$ 和 $\hat{S}_y(\mathbf{r})$ 的运动方程为

$$\begin{aligned}
 \partial_t \hat{S}_x(\mathbf{r}) &= -\mu_0\gamma H_0 \hat{S}_y(\mathbf{r}) \\
 &\quad + \mu_0(\gamma^2\hbar) [\hat{S}_y(\mathbf{r}) (H_{\text{ex},z}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},z}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r})) \\
 &\quad - \hat{S}_z(\mathbf{r}) (H_{\text{ex},y}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},y}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}))],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t \hat{S}_y(\mathbf{r}) = & \mu_0 \gamma H_0 \hat{S}_x(\mathbf{r}) \\
 & + \mu_0 (\gamma^2 \hbar) \left[-\hat{S}_x(\mathbf{r}) \left(H_{\text{ex},z}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},z}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) \right) \right. \\
 & \left. + \hat{S}_z(\mathbf{r}) \left(H_{\text{ex},x}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},x}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) \right) \right]. \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

在线性响应区域，式 (1.32) 中的 $H_{\text{ex},z}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) \approx H_{\text{ex},z}(-S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) = -H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r})$ 以及 $H_{\text{dip},z}(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{r}) \approx -H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r})$ 是静态的，这样，涨落的有效磁场写作

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ex},y}(\hat{S}_y \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},y}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}) = & H_{\text{dip},y}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + \frac{\partial_t \hat{S}_x(\mathbf{r}) + \mu_0 \gamma H_0 \hat{S}_y(\mathbf{r})}{\mu_0 \gamma^2 \hbar S} \\
 & + \frac{\hat{S}_y(\mathbf{r}) \left(H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right)}{S}, \\
 H_{\text{ex},x}(\hat{S}_x \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},x}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}) = & H_{\text{dip},x}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + \frac{-\partial_t \hat{S}_y(\mathbf{r}) + \mu_0 \gamma H_0 \hat{S}_x(\mathbf{r})}{\mu_0 \gamma^2 \hbar S} \\
 & + \frac{\hat{S}_x(\mathbf{r}) \left(H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right)}{S} \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

其中，横向自旋涨落 $\hat{\mathbf{S}}_{\perp} = \hat{S}_x \hat{\mathbf{x}} + \hat{S}_y \hat{\mathbf{y}}$ ，同时，在线性响应区域

$$\hat{S}_z(\mathbf{r}) = -\sqrt{S_e^2(\mathbf{r}) - (\hat{S}_x^2(\mathbf{r}) + \hat{S}_y^2(\mathbf{r}))} \approx -S_e(\mathbf{r}) + (\hat{S}_x^2(\mathbf{r}) + \hat{S}_y^2(\mathbf{r})) / (2S) = -S_e(\mathbf{r}) + \tilde{S}(\mathbf{r}),$$

其中 $\tilde{S}(\mathbf{r}) = (\hat{S}_x^2(\mathbf{r}) + \hat{S}_y^2(\mathbf{r})) / (2S)$ 与自旋涨落的幅度有关。那么，在线性响应区域，哈密顿量 (1.29) 变为

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & -\mu_0 \gamma \hbar \int d\mathbf{r} S_e(\mathbf{r}) H_0 + \mu_0 \gamma \hbar \int d\mathbf{r} \tilde{S}(\mathbf{r}) H_0 \\
 & - \frac{\mu_0 (\gamma \hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} \hat{S}_x(\mathbf{r}) \left[H_{\text{ex},x}(\hat{S}_x \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},x}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}) - H_{\text{dip},x}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] \\
 & - \frac{\mu_0 (\gamma \hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} \hat{S}_y(\mathbf{r}) \left[H_{\text{ex},y}(\hat{S}_y \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},y}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}) - H_{\text{dip},y}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] \\
 & - \frac{\mu_0 (\gamma \hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} \left[S_e(\mathbf{r}) H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r}) H_{\text{ex},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r}) H_{\text{dip},z}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}) \right. \\
 & \left. + S_e(\mathbf{r}) H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r}) H_{\text{dip},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - \tilde{S}(\mathbf{r}) H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - \tilde{S}(\mathbf{r}) H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right]. \quad (1.34)
 \end{aligned}$$

把公式 (1.33) 代入哈密顿量 (1.34)，我们得到

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & E_0 + \frac{\hbar}{2S} \int d\mathbf{r} \left[\hat{S}_x(\mathbf{r}) \partial_t \hat{S}_y(\mathbf{r}) - \hat{S}_y(\mathbf{r}) \partial_t \hat{S}_x(\mathbf{r}) \right] \\
 & - \frac{\mu_0 (\gamma \hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} \left\{ \left[\tilde{S}(\mathbf{r}) H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r}) H_{\text{dip},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\tilde{S}(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] \} \\
 & - \frac{\mu_0(\gamma\hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} S_e(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}), \tag{1.35}
 \end{aligned}$$

其中常数

$$E_0 = -\mu_0\gamma\hbar \int d\mathbf{r} H_0 S_e(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0(\gamma\hbar)^2}{2} \int d\mathbf{r} \left[S_e(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + S_e(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right].$$

式 (1.35) 中的第二个积分与磁化强度或有效磁场沿 $\hat{\mathbf{z}}$ 方向的涨落有关，我们将证明该积分值为零

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{r} \tilde{S}(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) & = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \tilde{S}(\mathbf{r}) \nabla_z \frac{\nabla_{z'} S_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \nabla_z \left[\tilde{S}(\mathbf{r}) \frac{\nabla_{z'} S_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
 & - \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\nabla_{z'} S_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_z \tilde{S}(\mathbf{r}) \\
 & = \int d\mathbf{r} S_e(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}), \tag{1.36}
 \end{aligned}$$

这样一来， $\int d\mathbf{r} \left[\tilde{S}(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] = 0$ 。类似地，

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{r} \tilde{S}(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) & = \alpha_{\text{ex}} \int d\mathbf{r} \tilde{S}(\mathbf{r}) \nabla^2 S_e(\mathbf{r}) \\
 & = \alpha_{\text{ex}} \int d\mathbf{r} \nabla \cdot \left[\tilde{S}(\mathbf{r}) \nabla S_e(\mathbf{r}) \right] - \alpha_{\text{ex}} \int d\mathbf{r} \left[\nabla \tilde{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla S_e(\mathbf{r}) \right] \\
 & = \int d\mathbf{r} S_e(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}), \tag{1.37}
 \end{aligned}$$

由此得到 $\int d\mathbf{r} \left[\tilde{S}(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - S_e(\mathbf{r})H_{\text{ex},z}(\tilde{S}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] = 0$ 。方程 (1.35) 的第三个积分

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{r} S_e(\mathbf{r})H_{\text{dip},z}(\hat{\mathbf{S}}_{\perp}, \mathbf{r}) & = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left[S_e(\mathbf{r}) \nabla_z \frac{\nabla_{x'} \hat{S}_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + S_e(\mathbf{r}) \nabla_z \frac{\nabla_{y'} \hat{S}_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \nabla_z \left[S_e(\mathbf{r}) \frac{\nabla_{x'} \hat{S}_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + S_e(\mathbf{r}) \frac{\nabla_{y'} \hat{S}_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
 & - \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left[\frac{\nabla_{x'} \hat{S}_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_z S_e(\mathbf{r}) + \frac{\nabla_{y'} \hat{S}_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_z S_e(\mathbf{r}) \right] \\
 & = \int d\mathbf{r} \left[S_x(\mathbf{r})H_{\text{dip},x}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + S_y(\mathbf{r})H_{\text{dip},y}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) \right] \tag{1.38}
 \end{aligned}$$

同样消失，这是因为对于均匀饱和磁化强度而言，静态横向偶极场 $H_{\text{dip},y}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) = 0$,

华中科技大学硕士学位论文

$H_{\text{dip},x}(S\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) = 0$ 。综上所述，哈密顿量 (1.35) 化简为

$$\hat{H} = E_0 + \frac{\hbar}{2S} \int d\mathbf{r} (\hat{S}_x(\mathbf{r})\partial_t\hat{S}_y(\mathbf{r}) - \hat{S}_y(\mathbf{r})\partial_t\hat{S}_x(\mathbf{r})). \quad (1.39)$$

由于 \hat{m}_p 是磁振子算符， $\hat{m}_p \propto e^{-i\omega_p t}$ 且 $\hat{m}_p^\dagger \propto e^{i\omega_p t}$ ，其中 ω_p 是磁振子模式“ p ”的本征频率。因此，根据式 (1.27)，我们得到

$$\begin{aligned} \partial_t\hat{S}_x(\mathbf{r}) &= -\frac{i\sqrt{2S}}{2} \sum_p \omega_p [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))\hat{m}_p - (A_p^*(\mathbf{r}) + B_p(\mathbf{r}))\hat{m}_p^\dagger], \\ \partial_t\hat{S}_y(\mathbf{r}) &= -\frac{\sqrt{2S}}{2} \sum_p \omega_p [(B_p^*(\mathbf{r}) - A_p(\mathbf{r}))\hat{m}_p - (A_p^*(\mathbf{r}) - B_p(\mathbf{r}))\hat{m}_p^\dagger]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

结合式(1.40)、式 (1.27)和式 (1.44)，我们将哈密顿量 (1.39)对角化

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_0 + \hbar \int d\mathbf{r} \sum_{pp'} \omega_{p'} \\ &\quad \times [(A_p(\mathbf{r})A_{p'}^*(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})B_{p'}(\mathbf{r}))\hat{m}_p\hat{m}_{p'}^\dagger + (A_p^*(\mathbf{r})A_{p'}(\mathbf{r}) - B_p(\mathbf{r})B_{p'}^*(\mathbf{r}))\hat{m}_p^\dagger\hat{m}_{p'} \\ &\quad + (B_p^*(\mathbf{r})A_{p'}(\mathbf{r}) - A_p(\mathbf{r})B_{p'}^*(\mathbf{r}))\hat{m}_p\hat{m}_{p'} + (B_p(\mathbf{r})A_{p'}^*(\mathbf{r}) - A_p^*(\mathbf{r})B_{p'}(\mathbf{r}))\hat{m}_p^\dagger\hat{m}_{p'}^\dagger] \\ &= E_0 + \frac{1}{2} \sum_p \hbar\omega_p (\hat{m}_p\hat{m}_p^\dagger + \hat{m}_p^\dagger\hat{m}_p), \end{aligned} \quad (1.41)$$

我们假设存在关系

$$\int d\mathbf{r} [A_p(\mathbf{r})A_{p'}^*(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})B_{p'}(\mathbf{r})] = \delta_{pp'}, \quad (1.42a)$$

$$\int d\mathbf{r} [B_p(\mathbf{r})A_{p'}^*(\mathbf{r}) - B_{p'}(\mathbf{r})A_p^*(\mathbf{r})] = 0. \quad (1.42b)$$

该关系确保算符 $\hat{b}(\mathbf{r})$ 的逆变换存在：即

$$\begin{aligned} \hat{m}_p &= \int d\mathbf{r} [A_p^*(\mathbf{r})\hat{b}(\mathbf{r}) - B_p(\mathbf{r})\hat{b}^\dagger(\mathbf{r})], \\ \hat{m}_p^\dagger &= \int d\mathbf{r} [A_p(\mathbf{r})\hat{b}^\dagger(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})\hat{b}(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (1.43)$$

算符 \hat{m}_p 的玻色子特性导出了 $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 的另外两个关系，即

$$\begin{aligned} [\hat{m}_p, \hat{m}_{p'}^\dagger] &= \delta_{pp'} \\ \rightarrow \int d\mathbf{r} [A_p(\mathbf{r})A_{p'}^*(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})B_{p'}(\mathbf{r})] &= \delta_{pp'}, \\ [\hat{m}_p, \hat{m}_{p'}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int d\mathbf{r} [B_p(\mathbf{r})A_{p'}^*(\mathbf{r}) - B_{p'}(\mathbf{r})A_p^*(\mathbf{r})] = 0. \quad (1.44)$$

我们注意到，式 (1.28) 和式 (1.44) 可以被视为完备性关系，这些关系确保了 \hat{m}_p 构成一个完备集。

最后，我们证明 $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 与磁化模式“ p ”中的磁化强度振幅 $M_{x,y}^p(\mathbf{r})$ 相关。通过将朗道 - 栗弗席兹 (LL) 方程线性化 $\partial_t \mathbf{M}^p = -\mu_0 \gamma \mathbf{M}^p \times (H_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{H}_{\text{ex}} + \mathbf{H}_{\text{dip}})$ ^[41] 其中 $\mathbf{M}^p(\mathbf{r}, t) = \{M_x^p(\mathbf{r})e^{-i\omega_p t}, M_y^p(\mathbf{r})e^{-i\omega_p t}, M_s\}$ ，我们发现 $M_{x,y}^p(\mathbf{r})$ 满足

$$\begin{aligned} & \mu_0 \gamma M_s (H_{\text{ex},y} [M_y^p(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}}] + H_{\text{dip},y} [M_x^p(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + M_y^p(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}}]) \\ & = -i\omega_p M_x^p(\mathbf{r}) + \mu_0 \gamma M_y^p(\mathbf{r}) (H_0 + H_{\text{dip},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r})), \\ & \mu_0 \gamma M_s (H_{\text{ex},x} [M_x^p(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}}] + H_{\text{dip},x} [M_x^p(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + M_y^p(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}}]) \\ & = i\omega_p M_y^p(\mathbf{r}) - \mu_0 \gamma M_x^p(\mathbf{r}) (H_0 + H_{\text{dip},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) - H_{\text{ex},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r})). \end{aligned} \quad (1.45)$$

另一方面，为了得到 $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 的方程，我们对式 (1.33) 中的各项与算符 \hat{m}_p^\dagger 求对易关系：

$$\begin{aligned} & [H_{\text{ex},y}(\hat{S}_y \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},y}(\hat{\mathbf{S}}_\perp, \mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger] \\ & = \left[H_{\text{dip},y}(S \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + \frac{\partial_t \hat{S}_x(\mathbf{r}) + \mu_0 \gamma H_0 \hat{S}_y(\mathbf{r})}{\mu_0 \gamma^2 \hbar S} + \frac{\hat{S}_y(\mathbf{r}) (H_{\text{dip},z}(S \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(S \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}))}{S}, \hat{m}_p^\dagger \right], \\ & [H_{\text{ex},x}(\hat{S}_x \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{r}) + H_{\text{dip},x}(\hat{\mathbf{S}}_\perp, \mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger] \\ & = \left[H_{\text{dip},x}(S \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + \frac{-\partial_t \hat{S}_y(\mathbf{r}) + \mu_0 \gamma H_0 \hat{S}_x(\mathbf{r})}{\mu_0 \gamma^2 \hbar S} + \frac{\hat{S}_x(\mathbf{r}) (H_{\text{dip},z}(S \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(S \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}))}{S}, \hat{m}_p^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

具体而言，对于交换有效磁场，我们有

$$H_{\text{ex},y}(\hat{S}_y \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{r}) = \alpha_{\text{ex}} \nabla^2 \hat{S}_y(\mathbf{r}) = \sqrt{2S} \alpha_{\text{ex}} \nabla^2 \sum_p \left[i \frac{A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})}{2} \hat{m}_p + \text{H.c.} \right], \quad (1.47)$$

他的对易子为

$$[H_{\text{ex},y}(\hat{S}_y \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger] = \sqrt{2S} \alpha_{\text{ex}} \nabla^2 \left[i \frac{A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})}{2} \right] = \sqrt{2S} H_{\text{ex},y} [i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}], \quad (1.48)$$

类似地,

$$\left[H_{\text{ex},x}(\hat{S}_x \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger \right] = \sqrt{2S} \alpha_{\text{ex}} \nabla^2 \left[\frac{A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})}{2} \right] = \sqrt{2S} H_{\text{ex},y} [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}]. \quad (1.49)$$

对于式 (1.46) 中的有效偶极场

$$\begin{aligned} H_{\text{dip},y(x)}(\hat{\mathbf{S}}_\perp, \mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{2S}}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \left[\nabla_{y(x)} \frac{\nabla_{x'} \hat{S}_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla_{y(x)} \frac{\nabla_{y'} \hat{S}_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2S}}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \sum_p \left[\nabla_{y(x)} \frac{\nabla_{x'} (A_p(\mathbf{r}') + B_p^*(\mathbf{r}'))}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right. \\ &\quad \left. + \nabla_{y(x)} \frac{\nabla_{y'} i (A_k(\mathbf{r}') - B_k^*(\mathbf{r}'))}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \hat{m}_k + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

因此

$$\begin{aligned} &\left[H_{\text{dip},y(x)}(\hat{\mathbf{S}}_\perp, \mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger \right] \\ &= \sqrt{2S} H_{\text{dip},y(x)} [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{x}} + i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

另一方面, 根据式 (1.40) 和式 (1.27), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \left[\hat{S}_x(\mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger \right] &= \sqrt{2S} (A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})) / 2, \\ \left[\hat{S}_y(\mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger \right] &= i\sqrt{2S} (A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})) / 2, \\ \left[\partial_t \hat{S}_x(\mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger \right] &= -i\sqrt{2S} \omega_p (A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})) / 2, \\ \left[\partial_t \hat{S}_y(\mathbf{r}), \hat{m}_p^\dagger \right] &= \sqrt{2S} \omega_p (A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})) / 2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

结合方程 (1.48), 方程 (1.49), 方程 (1.51), 和方程 (1.52), 式 (1.46) 给出了 $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 的关系:

$$\begin{aligned} &\mu_0 \gamma M_s (H_{\text{ex},y} [i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}] + H_{\text{dip},y} [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{x}} + i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}]) \\ &= -i\omega_p (A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})) / 2 + i (A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})) / 2 [H_0 + H_{\text{dip},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r})], \\ &\mu_0 \gamma M_s (H_{\text{ex},x} [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}] + H_{\text{dip},x} [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{x}} + i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}))/2\hat{\mathbf{y}}]) \\ &= i\omega_p i \frac{A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})}{2} + \mu_0 \gamma \frac{A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})}{2} [H_0 + H_{\text{dip},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}) + H_{\text{ex},z}(M_s \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r})], \end{aligned} \quad (1.53)$$

其中 $M_s = \gamma \hbar S$ 。通过比较式 1.53 和式 1.45，我们发现通过变换

$$\begin{aligned} M_x^p(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} (A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})), \\ M_y^p(\mathbf{r}) &= \frac{i}{2} (A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (1.54)$$

方程 (1.53) 与方程 (1.45) 相同，这意味着 $A_p(\mathbf{r})$ 和 $B_p(\mathbf{r})$ 和磁化强度的模式振幅 $M_{x,y}^p(\mathbf{r})$ 通过式 (1.54) 联系起来。由此，自旋算符可以根据磁化强度振幅 $M_{x,y}^p(\mathbf{r})$ ，用磁振子算符 $\{\hat{m}_p, \hat{m}_p^\dagger\}$ 展开，其展开形式为

$$\begin{aligned} \hat{S}_x(\mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{2S}}{2} \sum_p [(A_p(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r})) \hat{m}_p + \text{H.c.}] = \sqrt{2S} \sum_p (M_x^p(\mathbf{r}) \hat{m}_p + \text{H.c.}), \\ \hat{S}_y(\mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{2S}}{2} \sum_p [i(A_p(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r})) \hat{m}_p + \text{H.c.}] = \sqrt{2S} \sum_p (M_y^p(\mathbf{r}) \hat{m}_p + \text{H.c.}), \end{aligned} \quad (1.55)$$

其中，振幅是根据方程 (1.44) 归一化^[42,43]，具体来说

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} (M_x^p(\mathbf{r}) M_y^{p'*}(\mathbf{r}) - M_x^{p'*}(\mathbf{r}) M_y^p(\mathbf{r})) &= \int d\mathbf{r} \frac{i}{2} (-A_p(\mathbf{r}) A_{p'}^*(\mathbf{r}) + B_p^*(\mathbf{r}) B_{p'}(\mathbf{r})) \\ &= -\frac{i}{2} \delta_{pp'}, \end{aligned} \quad (1.56a)$$

$$\int d\mathbf{r} (M_y^p(\mathbf{r}) M_x^{p'}(\mathbf{r}) - M_x^p(\mathbf{r}) M_y^{p'}(\mathbf{r})) = \int d\mathbf{r} \frac{i}{2} (A_p(\mathbf{r}) B_{p'}^*(\mathbf{r}) - B_p^*(\mathbf{r}) A_{p'}(\mathbf{r})) = 0. \quad (1.56b)$$

1.2 超导体的电磁响应

1.2.1 超导体电磁近邻效应的唯象理论

超导体的一般电动力学性质与电磁场的频率 ω 相关，我们聚焦于磁振子与超导体电子间的相互作用，而与之相关的电磁场频率足够低 ($\lesssim 100\text{GHz}$)，所以我们能够借助二流体模型来阐释超导体的电动力学性质。

基于二流体模型的超导体电动力学是由伦敦 (London) 等人^[44] 提出的。他们认为，在超导转变温度 T_c 以下，超导体内部存在两种载流子，即正常电流和超电流。其中，密度为 ρ_n 的正常流体以速度 \mathbf{v}_n 运动，它会受到杂质和声子的散射；而密度为 ρ_s 的超流体以速度 \mathbf{v}_s 运动，且不受散射影响。这里， $\rho_s + \rho_n$ 等于净电子密度 ρ_e 。对于在材料中以频率 ω 振荡的电场，它会同时驱动正常电流和超电流，这两种电流

满足

$$\begin{aligned} e\mathbf{E} - m_e \frac{\mathbf{v}_n}{\tau} &= m_e \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = -i\omega m_e \mathbf{v}_n, \\ e\mathbf{E} &= m_e \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -i\omega m_e \mathbf{v}_s, \end{aligned} \quad (1.57)$$

其中 m_e 是电子的质量, τ 是电子散射的弛豫时间。由此, 超电流和正常电荷电流可表示为

$$\mathbf{J}_s = \rho_s e \mathbf{v}_s = \frac{i\rho_s e^2}{m_e \omega} \mathbf{E}, \quad (1.58)$$

$$\mathbf{J}_n = \rho_n e \mathbf{v}_n = \left[\frac{\rho_n e^2 \tau}{m_e (1 + \omega^2 \tau^2)} + i \frac{\rho_n e^2 \tau}{m_e} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] \mathbf{E}. \quad (1.59)$$

在超导体内部, 电场会同时驱动出正常电流 \mathbf{J}_n 和超流 \mathbf{J}_s , 总电流 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s = \tilde{\sigma}(\omega) \mathbf{E}$, 其中电导率 $\tilde{\sigma}(\omega)$ 为^[45-47]

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{\rho_n e^2 \tau}{m_e} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} + i \left(\frac{\rho_n e^2 \tau}{m_e} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{\rho_s e^2}{m_e} \frac{1}{\omega} \right). \quad (1.60)$$

超流体密度 ρ_s 和正常流体密度 ρ_n 决定着这两种电流的大小。他们与温度密切相关。当 $T < T_c$ 时, $\rho_s(T) = \rho_e [1 - (T/T_c)^4]$, $\rho_n(T) = \rho_e (T/T_c)^4$, 温度会对电流大小产生显著影响。由于对于微波频率 $\omega \lesssim 100\text{GHz}$ 而言, $\omega\tau \ll 1$, 所以一般情况下我们有

$$\tilde{\sigma}(\omega, T) \approx \frac{\rho_n(T) e^2 \tau}{m_e} + i \frac{\rho_s(T) e^2}{m_e} \frac{1}{\omega} = \sigma_n(T) + i \frac{1}{\omega \mu_0 \lambda_L^2(T)}, \quad (1.61)$$

其中 $\sigma_n(T) = \rho_n(T) e^2 \tau / m_e$ 是正常金属的电导率, $\lambda_L(T) = \sqrt{m_e / (\mu_0 \rho_s(T) e^2)}$ 是伦敦趋肤长度。由此, 在超导体内部, 当 $T < T_c$ 时, 总电流 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_n = \tilde{\sigma} \mathbf{E}$; 当 $T > T_c$ 时, 超导体转变为正常金属, 此时 $\tilde{\sigma} = \sigma_n$ 。

另一方面, 在超导体内部, 麦克斯韦方程组可表示为^[48]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.62a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.62b)$$

其中, 我们假设超导体内部的磁导率为真空磁导率为 μ_0 。对式 (1.62a) 中的第一个方程取旋度, 并将式 (1.62b) 代入其中, 我们可以得到超导体内部电场 \mathbf{E} 的运动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_S^2 \mathbf{E} = 0, \quad (1.63)$$

其中我们运用了关系 $\mathbf{J} = \tilde{\sigma}\mathbf{E}$ 。此时,波矢 $k_S = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 + i\omega\mu_0\tilde{\sigma}}$ 并不是一个实数。在低温 $T \ll T_c$ 的情况下, $\tilde{\sigma} \approx i/(\omega\mu_0\lambda_L^2)$, 此时 $k_S \approx \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - 1/\lambda_L^2}$ 。对于传统超导体, $\lambda_L \sim 100 \text{ nm}$, 并且对于低频 $\omega \sim 100 \text{ GHz}$, $1/\lambda_L^2 \approx 10^{14} \gg \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \approx 1.1 \times 10^5 \text{ m}^{-2}$, 这样 $k_S \approx \pm i/\lambda_L$ 是纯虚数。在这种情况下, 超导体内部电场的解为 $\mathbf{E} \propto e^{-x/\lambda_L}$, 它以大约为 $\sim \lambda_L$ 的衰减长度衰减。类似地, 我们可以得到磁场的运动方程。对式 (1.62b) 中的第二个方程取旋度, 并将式 (1.62a) 代入其中, 可得

$$\nabla^2\mathbf{H} + k_S^2\mathbf{H} = 0. \quad (1.64)$$

磁场满足与电场方程 (1.63) 相同的方程。这意味着磁场仅存在于超导体靠近表面的区域, 其特征穿透深度为 λ_L , 即迈斯纳效应。

1.2.2 超导-铁磁系统电磁邻近效应的一般理论

鉴于铁磁体的磁化强度与超导体的库珀对之间存在相互偶极作用, 在本小节中, 我们对二者间的自洽动力学, 也就是它们的电磁邻近相互作用进行了一般性的阐释。对于近邻的超导体-铁磁体异质结构, 由磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ 发出的偶极场会进入超导体, 并产生迈斯纳超流。这些电流会产生奥斯特磁场, 而该磁场又会反过来影响铁磁层中的磁化动力学。磁振子与库珀对超电流之间电磁邻近效应的微观过程如图 1.1 所示

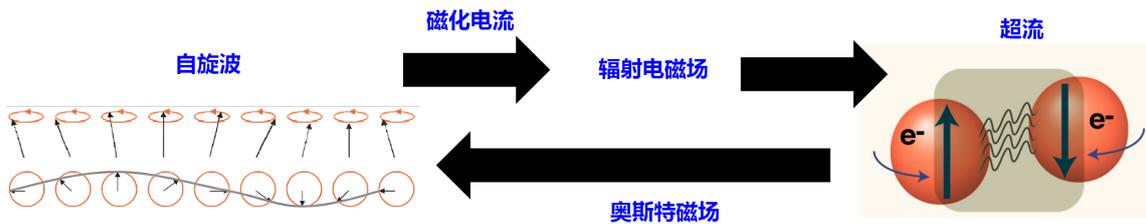


图 1.1 通过电磁邻近效应实现的磁振子与库珀对超流之间的耦合。

如图 1.2 所示, 我们将这样一个耦合系统划分为三个区域, 即真空区域、超导体区域和铁磁体区域, 这三个区域被三个边界分隔开来, 也就是超导体-铁磁体边界 Γ_1 、超导体-真空边界 Γ_2 以及铁磁体-真空边界 Γ_3 。由于偶极相互作用, 电磁场会在整个空间中形成特定的分布, 而在不同的区域, 电磁场遵循的麦克斯韦方程组的形式也不同。在真空或绝缘体内部, 由于不存在自由电荷, 电场满足 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ 。即

华中科技大学硕士学位论文

使在金属中，当受到电场作用时，自由电荷积累会随着弛豫时间 τ 迅速衰减。根据电荷守恒，自由电荷 ρ_f 随时间的变化遵循

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (1.65)$$

另一方面，根据欧姆定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_f. \quad (1.66)$$

结合两个方程，我们发现自由电荷密度 $\rho_f(t) = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}$ ，其中 ρ_0 是 $t = 0$ 刻的自由电荷密度，所以自由电荷密度 $\rho_f(t)$ 会在弛豫时间 $\tau = \varepsilon/\sigma$ 内衰减。通常情况下，对于经典导体铜，其弛豫时间 $\tau \sim 10^{-19}$ 秒，所以对于微波频率 $\omega \lesssim 100$ GHz 而言， $\omega\tau \ll 1$ 。也就是说，在微波时间尺度上，自由电荷的涨落几乎瞬间就衰减为零，基于此，我们可以假设：除了在边界或界面之外，方程 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ 在整个空间区域内均是成立的。由此，麦克斯韦方程组便可以表述为

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mu_0[\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (1.67a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.67b)$$

其中 ε_r 是取决于材料的介电常数：在铁磁体内部 $\varepsilon_r = \varepsilon_F$ ，而在超导体内部或真空中， $\varepsilon_r = \varepsilon_0$ ，为真空介电常数。

在铁磁体内部，磁化强度 \mathbf{M} 和磁场 \mathbf{H} 共同构成了磁感应强度 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 。另一方面，根据欧姆定律，电流 \mathbf{J} 与电场 \mathbf{E} 成正比，即 $\mathbf{J} = \sigma_F \mathbf{E}$ ，其中在铁磁金属内部电导率 $\sigma_F \neq 0$ ，而在铁磁绝缘体内 $\sigma_F = 0$ 。对式(1.67b)取旋度，我们得到频率为 ω 的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 的运动方程，总结于表1.1中，其中系数 $k_F = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_r + i\omega \mu_0 \sigma_F}$ 。

表 1.1 不同区域中电场和磁场的动力学方程，其中 $k_F = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_F + i\omega \mu_0 \sigma_F}$ ， $k_S = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + i\omega \mu_0 \tilde{\sigma}}$ ， $k_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}$ 。

	电场	磁场
在铁磁中	$\nabla^2 \mathbf{E} + k_F^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$	$\nabla^2 \mathbf{H} + k_F^2 \mathbf{H} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - k_F^2 \mathbf{M}$
在超导体中	$\nabla^2 \mathbf{E} + k_S^2 \mathbf{E} = 0$	$\nabla^2 \mathbf{H} + k_S^2 \mathbf{H} = 0$
在真空中	$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0$	$\nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} = 0$

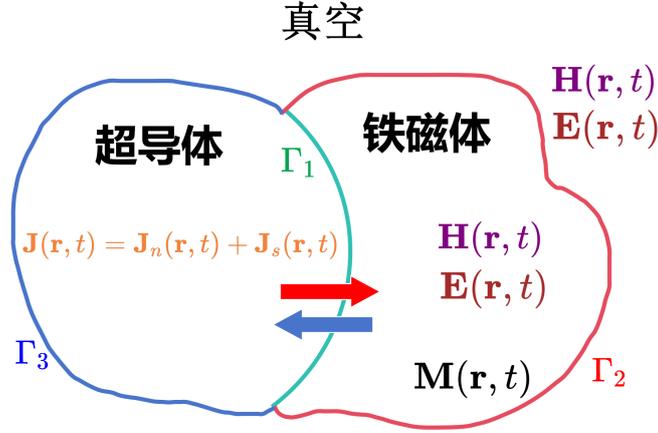


图 1.2 超导体-铁磁体异质结构被划分为三个区域（超导体区域、铁磁体区域、真空区域），并由三个边界（ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ）分隔开来。在铁磁体内部，磁化强度 $\mathbf{M} \neq 0$ ；而在超导体内部，存在总电流 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ，它包括正常电流 $\mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t)$ 和超电流 $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$ 。电磁场存在于整个空间中，其分布由麦克斯韦方程组以及边界条件所决定。

在超导体内部，受驱动的超流会对电磁场产生反作用。根据二流体模型（见章节1.2.1），电场在超导体内部会同时产生正常电流 \mathbf{J}_n 和超电流 \mathbf{J}_s ，总电流 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$ 。我们在表 1.1 中总结了超导体内部电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 的运动方程，其中系数 $k_S = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + i\omega \mu_0 \tilde{\sigma}}$

在真空中，电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 满足如表 1.1 所示的波动方程，其中波矢 $k_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} = \omega/c$ ，该波矢由光速 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 和频率 ω 决定。

另一方面，对于边界条件，根据方程(1.67b)，电场 \mathbf{E} 的切向分量 \mathbf{E}_{\parallel} 在界面处是连续的。并且由于不存在表面电流，磁场 \mathbf{H} 的切向分量 \mathbf{H}_{\parallel} 也是连续的。因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，所以磁感应强度 \mathbf{B} 的法向分量 $\mathbf{B}_{\perp} = \mu_0(\mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{M}_{\perp})$ 在边界处是连续的。最后，对于电场 \mathbf{E} 的法向分量 \mathbf{E}_{\perp} ，对方程(1.67b)中的第二个方程取散度，我们得到 $\nabla \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_r \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = 0$ ，这样一来，电流的法向分量 \mathbf{J}_{\perp} 与位移电流 $\epsilon_r \partial_t \mathbf{E}_{\perp}$ 之和是连续的。在不同的区域内， \mathbf{J}_{\perp} 与 ϵ_r 的形式不同，具体来说

在真空中：	$\epsilon_r = \epsilon_0,$	$\mathbf{J}_{\perp} = 0,$
在铁磁金属中：	$\epsilon_r = \epsilon_F,$	$\mathbf{J}_{\perp} = \sigma_F \mathbf{E}_{\perp},$
在铁磁绝缘体中：	$\epsilon_r = \epsilon_F,$	$\mathbf{J}_{\perp} = 0,$
在超导体中：	$\epsilon_r = \epsilon_0,$	$\mathbf{J}_{\perp} = \mathbf{J}_{n\perp} + \mathbf{J}_{s\perp} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}_{\perp}.$ (1.68)

电场 \mathbf{E} 的法向分量 \mathbf{E}_\perp 的另一个边界条件来自方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。我们注意到，由于电荷积累，这个方程在边界处并不成立；然而，在低频情况下，它在材料内部仍然适用。根据电场的切向分量 \mathbf{E}_\parallel 在界面处连续这一条件， $\partial_\parallel \mathbf{E}_\parallel$ 也是连续的，再结合 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，我们发现 $\partial_\perp \mathbf{E}_\perp$ 在界面处是连续的。我们在表 1.2 中列出了所有的边界条件。

1.3 超导-铁磁系统电磁近邻效应理论及实验进展

在现代电子学领域，门控效应发挥着极为关键的作用。凭借门控效应，我们能够在微观尺度下构建起可对电子实施精准调控的纳米结构，从而实现逻辑运算和信息处理。自旋波或者磁振子，与电子一样，是潜力巨大的信息载体^[49-51]。在磁性绝缘体中传播时，因其不涉及电荷的移动，得以有效规避目前电子作为载体时面临的焦耳热问题。不过，自旋的门控操作存在较大难度，这是因为它无法直接与电压实现耦合。因此，如何实现对磁子的调控成为了研究重点。近期，有研究提出借助电磁近邻效应，利用超导体^[52-70]、金属^[71-79]以及其他铁磁体^[80-90]等手段来实现对磁振子的门控。本部分着重探讨超导-铁磁系统中电磁近邻效应在理论研究与实验探索方面的前沿进展。这些进展主要集中于两种典型的结构构型，即超导-铁磁双层结构和超导-铁磁-超导三层异质结结构。后面我们将针对这两类结构构型所取得的理论及实验研究进展分别进行详细阐述。

1.3.1 超导-铁磁双层结构

1.3.1.1 理论进展

在之前的研究中，超导体常常被视为完美导体或者完美的抗磁体 ($\mu \rightarrow -\infty$)。例如，Golovchanskiy 等人模拟了能够完全屏蔽杂散磁场的厚超导薄膜的对自旋波的影响^[53,54]。具体来说，对于超导体-铁磁体双层结构，超导体能够以非互易的方式调制静磁表面自旋波（即 Damon-Eshbach 模式^[91]）。在这种情况下，面内波矢的方向垂直于饱和磁化强度的方向，当面内波矢为正时，自旋波明显受到超导的调制，其相速度得到显著提升。此外，对于我们在铁磁体上方构筑周期性超导体结构时，正波数的自旋波会受到超导体的影响，从而产生一系列的禁带，这些预言体现了超导体-铁磁体结构中超导体对自旋波色散关系的调控。

最近，Yu 等人^[52]提出可以利用薄超导体对铁磁绝缘体（如钇铁石榴石）中的

表 1.2 不同边界 Γ_1, Γ_2 和 Γ_3 处的边界条件.

	Γ_1 : 超导 铁磁	Γ_2 : 铁磁 真空	Γ_3 : 超导 真空
\mathbf{H}_{\parallel}	$\mathbf{H}_{\parallel S} = \mathbf{H}_{\parallel F}$	$\mathbf{H}_{\parallel F} = \mathbf{H}_{\parallel V}$	$\mathbf{H}_{\parallel S} = \mathbf{H}_{\parallel V}$
\mathbf{H}_{\perp}	$\mathbf{H}_{\perp S} = (\mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{M}_{\perp}) _F$	$(\mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{M}_{\perp}) _F = \mathbf{H}_{\perp V}$	$\mathbf{H}_{\perp S} = \mathbf{H}_{\perp V}$
\mathbf{E}_{\parallel}	$\mathbf{E}_{\parallel S} = \mathbf{E}_{\parallel F}$	$\mathbf{E}_{\parallel F} = \mathbf{E}_{\parallel V}$	$\mathbf{E}_{\parallel S} = \mathbf{E}_{\parallel V}$
\mathbf{E}_{\perp}	$(\mathbf{J}_{\perp} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_{\perp}) _S = (\mathbf{J}_{\perp} + \varepsilon_F \partial_t \mathbf{E}_{\perp}) _F$	$(\mathbf{J}_{\perp} + \varepsilon_F \partial_t \mathbf{E}_{\perp}) _S = (\mathbf{J}_{\perp} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_{\perp}) _F$	$(\mathbf{J}_{\perp} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_{\perp}) _S = (\mathbf{J}_{\perp} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_{\perp}) _V$
	$\partial_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _S = \partial_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _F$	$\partial_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _F = \partial_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _V$	$\partial_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _S = \partial_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _V$

磁振子进行门控。当自旋波垂直于磁化方向传播时，自旋波产生的杂散磁场具有手性，如图 1.3 所示，即只有向右传播 ($k_y > 0$) 的自旋波能够在磁性薄膜上方产生杂散场。当我们在磁性薄膜顶部放置一个超导体时，它只能与向右传播 ($k_y > 0$) 的自旋波相互作用。穿透超导体的杂散磁场会驱动迈斯纳超导电流 \mathbf{J}_s 。随后，该超导电流会产生一个奥斯特磁场 $\tilde{\mathbf{H}}$ ，如图 1.3(b) 所示，这个磁场会反过来作用于磁化强度。从而对自旋波的色散进行手性的调控。我们首先证明自旋波产生的偶极场具有手性特征。考虑厚度为 s 的钇铁石榴石磁性薄膜，如图 1.3 所示，静磁场 $\mathbf{H}_{\text{app}} = H_{\text{app}}\hat{\mathbf{z}}$ 使饱和磁化强度 \mathbf{M}_s 沿 $\hat{\mathbf{z}}$ 方向取向。当磁性薄膜非常薄时，各向同性的交换相互作用主导着自旋波的传输性质。在这种情况下，我们忽略自旋波色散中的偶极相互作用以及自旋波的椭圆度，这在参考文献^[52]中被证明是合理的。因此，振幅 $m_y \approx im_x$ ，交换自旋波是圆偏振的。此外，对于很薄的铁磁薄膜，我们假设磁化强度沿厚度方向是均匀的，由此，对于沿面内以频率 ω ，波矢 \mathbf{k} 传输的自旋波，

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_x(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{k}) &= m_x e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{M}_y(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{k}) &= i\mathbf{M}_x(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{k}),\end{aligned}\tag{1.69}$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ 。因此，通过将本征模方程 (1.69) 代入方程 (1.23)，我们得到了薄膜上方的偶极场

$$\begin{pmatrix} H_x(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}) \\ H_y(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}) \\ H_z(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}) \end{pmatrix}_d = \frac{1}{2} e^{-|\mathbf{k}|x} (|\mathbf{k}| + k_y) \begin{pmatrix} 1 \\ -ik_y/|\mathbf{k}| \\ -ik_z/|\mathbf{k}| \end{pmatrix} e^{-i\omega_k t} \int_{-s}^0 m_x^{(0)}(x', \boldsymbol{\rho}; \mathbf{k}) e^{|\mathbf{k}|x'} dx'.$$

(1.70)

根据方程 (1.70)，我们可以发现偶极场的特殊手性。当自旋波垂直于磁化方向传播，即 $|\mathbf{k}| = |k_y|$ 时，这种手性最为明显。在这种情况下，方程 (1.70) 中的项 $(|\mathbf{k}| + k_y)/2$ 变为 $(|k_y| + k_y)/2$ 。当 $k_y < 0$ 时， $(|\mathbf{k}| + k_y)/2 = 0$ ；而当 $k_y > 0$ 时，该项变为 1。如图 1.3 所示，只有向右传播的自旋波能够在薄膜上方产生偶极场。接下来我们在铁磁薄膜上放一层超导体薄膜，可以预期，右传播的自旋波能够被超导所调制。一般来说，由于超导迈斯纳效应，磁场只能渗透到超导体内 λ_L ，即伦敦趋肤深度的量级，然而，对于超薄（厚度小于伦敦趋肤深度）的超导体，磁场会穿过超导体，进而在超导体内驱动超流，而超流会产生影响自旋波传输的奥斯特磁场，进而对自旋波色

散进行调控。Yu 等人发现，此时磁振子频率会以一种手性的方式发生显著偏移，其偏移量遵循公式

$$\delta\omega_{\mathbf{k}} = \frac{d}{4} e^{-|\mathbf{k}|(\frac{s}{2}+d)} \frac{1 - e^{-|\mathbf{k}|s}}{|\mathbf{k}|} \mu_0^2 \gamma M_s \frac{\rho_e e^2}{m_e} \left(\frac{k_y}{|\mathbf{k}|} + \left| \frac{k_y}{|\mathbf{k}|} \right| \right). \quad (1.71)$$

其中 d 为超导体的厚度。当 $k_y < 0$ 时, $\delta\omega_{\mathbf{k}} = 0$, 频率偏移量为 0, 而当 $k_y > 0$ 时, 频率会发生移动。如图 1.3(c) 所示, 当自旋波沿 \hat{y} -方向传播时, 色散的非互易性尤为明显。其中, 当 $k_y > 0$ 时, 其频率会发生显著移动。对于厚度 $s = 20$ 纳米的钕铁石榴石薄膜和厚度 $d = 40$ 纳米且电子密度 $\rho_e = 10^{29}/\text{m}^3$ ^[92] 的超导氮化铌 (NbN) 薄膜组成的超导-铁磁异质结结构, 当外磁场 $\mu_0 H_{\text{app}} = 300$ mT 且 $k_y = |\mathbf{k}| \ll \{1/d, 1/s\}$ 时, 频移达到可观的 $\delta\omega \approx 45$ GHz。

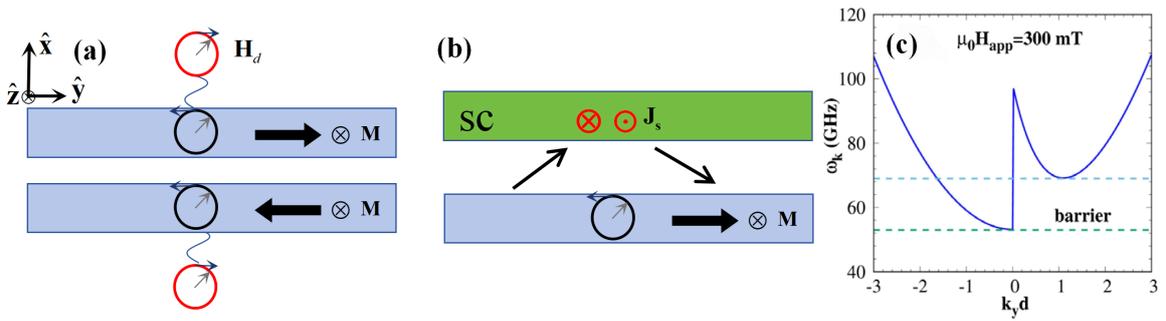


图 1.3 通过超导体对磁振子进行手性门控。向右（向左）传播的自旋波在薄膜上方（下方）发出偶极磁场 \mathbf{H}_d 。(b) 超导体通过由超导电流产生的奥斯特磁场反过来作用于磁化强度。(c) 由超导门控所诱导的、具有动量 $k_y \hat{y}$ 的自旋波色散关系。
图片来源：图 (c) 源于文献^[52]。

Kuznetsov 和 Fraerman 在稍不同的结构中, 通过考虑偶极相互作用, 同样预测了超导体对磁振子的手性门控效应^[55]。如图 1.4 所示, 他们考虑了一个厚度为 h 的薄铁磁体放置在厚度假定为无穷大的厚超导体之上。与 Yu 等人不同, 他们利用镜像法分析了该系统中的电磁邻近效应。为了方便理解, 这里我们简要介绍一下镜像法。

镜像法——对于铁磁体 - 超导体双层结构, 当通过偶极相互作用耦合时, 展示超导体对铁磁体中磁化动力学影响的一种便捷方法是镜像法^[93]。这种方法的关键思想是将超导体视为磁导率 $\mu \rightarrow -\infty$ 的理想抗磁体, 如图 1.4 所示。该方法忽略了由于超导体的迈斯纳效应导致的磁场在伦敦穿透深度内的有限穿透情况。不过, 它仍能定性解释磁化强度与超导体之间的相互作用。在这个假设下, 超导体内部 $\mathbf{B} = 0$ 。结合麦克斯韦方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, \mathbf{B} 的法向分量 \mathbf{B}_\perp 连续这一边界条件要求在界面处法

向分量 \mathbf{B}_\perp 为零。接下来，镜像法将超导体对铁磁体的影响等效为超导体内部的有效磁化强度对铁磁体的影响，并且该有效磁化强度产生的磁感应强度满足边界条件。例如，对于放置在无限大超导体上方的单个磁矩 $\mathbf{m}_1 = \{m_x^{(1)}, m_y^{(1)}, m_z^{(1)}\}$ ，通过引入镜像偶极子 $\mathbf{m}_2 = \{-m_x^{(1)}, m_y^{(1)}, m_z^{(1)}\}$ 可以满足边界条件，如图 1.4 所示。对于边界上的任意位置 P ，总磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{1P} + \mathbf{B}_{2P}$ ，其中

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{1P} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}_{1P}(\mathbf{n}_{1P} \cdot \mathbf{m}_1) - \mathbf{m}_1}{|\mathbf{R}_{1P}|^3}, \\ \mathbf{B}_{2P} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}_{2P}(\mathbf{n}_{2P} \cdot \mathbf{m}_2) - \mathbf{m}_2}{|\mathbf{R}_{2P}|^3},\end{aligned}\quad (1.72)$$

分别是由 \mathbf{m}_1 和 \mathbf{m}_2 在位置 P 处产生的磁感应强度。根据图 1.4， $\mathbf{n}_{1P} = \{n_x, n_y, n_z\}$ ， $\mathbf{n}_{2P} = \{-n_x, n_y, n_z\}$ 是从磁矩指向界面上位置 P 的单位向量，并且 $|\mathbf{R}_{1P}| = |\mathbf{R}_{2P}| = |R|$ 是从磁矩到位置 P 的距离。因此，其法向分量

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\perp &= \mathbf{B}_{1P,\perp} + \mathbf{B}_{2P,\perp} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3n_x(n_x m_x^{(1)} + n_y m_y^{(1)} + n_z m_z^{(1)}) - m_x^{(1)}}{|R|^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-3n_x(n_x m_x^{(1)} + n_y m_y^{(1)} + n_z m_z^{(1)}) + m_x^{(1)}}{|R|^3} \right] = 0,\end{aligned}\quad (1.73)$$

满足边界条件。

通过将镜像法应用于铁磁体 - 超导体双层结构，自旋波向不同方向 ($+\mathbf{q}$ 和 $-\mathbf{q}$) 传播以及它们在超导体中镜像偶极子的瞬态图像如图 1.4(c) 和 (d) 所示。对于垂直于外加磁场 \mathbf{H}_{ext} 的正波矢 \mathbf{q} 和负波矢 \mathbf{q} ，磁偶极子及其镜像的分布是不同的，这导致了偶极子与其镜像的相互作用同样不同。例如，一个偶极子 i 与另一个偶极子 j 耦合的成对相互作用能 E_{ij} 为

$$E_{ij} = -\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}_{j \rightarrow i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-3(\mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{m}_i)(\mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{m}_j) + \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j}{|\mathbf{R}_{ji}|^3}, \quad (1.74)$$

其中 $\mathbf{B}_{j \rightarrow i}$ 是偶极子 j 在偶极子 i 处产生的磁感应强度， $|\mathbf{R}_{ji}|$ 是偶极子 i 和 j 之间的距离， \mathbf{n}_{ji} 是从偶极子 j 指向 i 的单位向量。从图 1.4(b) 和 (c) 中的系统对称性可以看出，铁磁体中的偶极子与超导体中的偶极子之间的相互作用能取决于波的传播方向。例如，在图 1.4(b) 中，具有 $+\mathbf{q}$ 的偶极子 1 和偶极子 2' 之间的相互作用能，与具有 $-\mathbf{q}$ 的偶极子 2 和偶极子 1' 之间的相互作用能是不同的。实际上，对于向左传播的

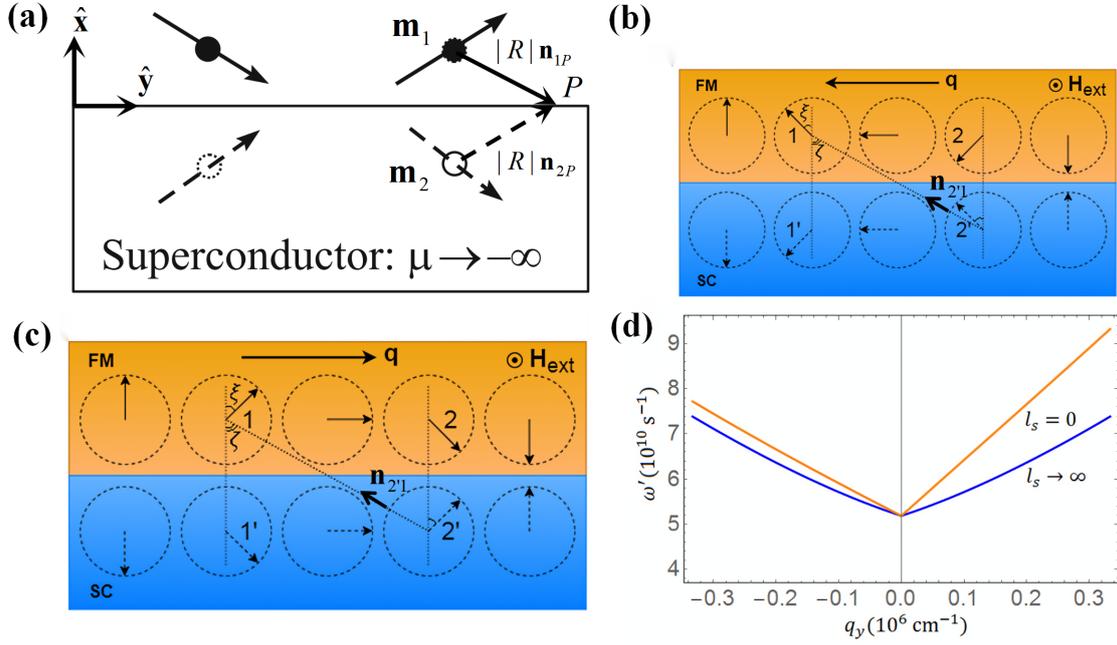


图 1.4 展示了位于理想导体上方的两个不同极化的偶极子，以及它们的镜像偶极子，这些镜像偶极子产生的磁感应强度满足边界条件。(b) 和 (c) 是在由外磁场 \mathbf{H}_{ext} 偏置的铁磁体 - 超导体双层结构中，自旋波及其镜像沿着波矢 $\pm \mathbf{q} \perp \mathbf{H}_{\text{ext}}$ （即波矢 $\pm \mathbf{q}$ 垂直于外磁场 \mathbf{H}_{ext} ）向相反方向传播的瞬态图像。(d) 分别展示了在铁磁体 - 超导体双层结构中，具有不同伦敦穿透深度 $l_s = \{0, \infty\}$ （即 l_s 取值为 0 和无穷大）时的自旋波色散关系。图片来源：图 (a) 源于文献^[93]，图 (b), (c), (d) 源于文献^[55]。

自旋波， $\mathbf{n}_{2'1}$ 几乎与磁偶极子 \mathbf{m}_1 和 \mathbf{m}_2 平行。然而，对于向右传播的自旋波， $\mathbf{n}_{2'1}$ 几乎与磁偶极子垂直。因此，由于向量 $(\mathbf{n}_{12'} \cdot \mathbf{m}_1)(\mathbf{n}_{12'} \cdot \mathbf{m}_2)$ 取决于自旋波的传播方向，一般来说 $E_{12'}^+ > E_{12'}^-$ ，其中“+”和“-”分别对应 $+\mathbf{q}$ 和 $-\mathbf{q}$ 方向。所以，向右传播的自旋波的耦合能大于向左传播的自旋波的耦合能，这意味着自旋波色散具有非互易性，即 $+\mathbf{q}$ 分支相对于 $-\mathbf{q}$ 分支存在高频偏移。Kuznetsov 和 Fraerman 使用麦克斯韦方程和伦敦方程，针对不同的伦敦穿透深度 l_s ，计算了这种结构中的自旋波色散。如图 1.4(d) 所示，当 $l_s = 0$ 时，色散中呈现出明显的非互易性，而当 $l_s \rightarrow \infty$ 时，由于超导性消失，非互易性也随之消失。

1.3.1.2 实验进展

在 2018 年, Golovchanskiy 等人报道了铁磁体-超导体双层异质结构中存在的非常规微波吸收现象^[94]。在该实验中，他们将宽度为 W 、厚度为 d 的坡莫合金 (Py) 薄膜放置在由铌 (Nb) 共面波导制成的传输线上，并使用矢量网络分析仪 (VNA) 进行

微波吸收光谱测量。如图 1.5 中的黑色曲线所示，在超导转变温度 T_c 以下，除了主要吸收峰外，还观察到了几个较弱的额外吸收峰，这些吸收峰用整数 $n = \{1, 2, 3, 4\}$ 标记。当增加磁场时，额外的吸收峰依然存在，如图 1.5 中的红色和蓝色曲线所示。然而，当 $T > T_c$ 时，额外的吸收峰消失了，并且与 $T < T_c$ 时相比，主要吸收峰的频率有微小的偏移，如图中虚线所示。在超导转变温度 T_c 以上和以下呈现出的这些不同的吸收特征，表明了超导性对磁化动力学的影响。图 1.5 中的主吸收峰代表着磁性薄膜里的铁磁共振（FMR）模式，其频率 f_r 与外加磁场 H 、有效各向异性场 H_a 以及饱和磁化强度 M_s 相关

$$(2\pi f/\gamma)^2 = (H + H_a)(H + H_a + M_s), \quad (1.75)$$

其中 γ 为旋磁比。通过对比当 $T < T_c$ 和 $T > T_c$ 时数据在公式 (1.75) 中的拟合参数，发现共面波导的超导性通过有效增强有效各向异性场 H_a 约 8%，从而提高了铁磁共振频率：当 $H = 3.1 \times 10^4$ A/m 时，频率偏移约为 0.02 GHz，即 $T < T_c$ 时 $f_r = 2.47$ GHz， $T > T_c$ 时 $f_r = 2.45$ GHz，如图 1.5 所示。另一方面，较小的吸收则代表自旋波共振。如图 1.5 所示，根据文献^[94]，所观测到的自旋波共振（SWR）模式被确认为静磁表面驻波（MSSW）。Golovchanskiy 等人采用如上所述的镜像法^[55,93]，对超导体对自旋波模式的影响展开分析，通过数值模拟，他们发现超导体提升静磁表面驻波（MSSW）模式的本征频率。

随后在 2019 年，Golovchanskiy 等人^[65]开展了更为深入的研究工作。他们通过在铁磁薄膜之上布置等间距的超导体条带，成功构建出磁子晶体，此结构的具体形态如图 1.5(b) 所示。其中，具有三角形横截面的铌（Nb）条带以均匀间隔的方式排列于坡莫合金（Py）薄膜的上方，而坡莫合金薄膜则沉积在由铌制成的超导共面波导之上。为了获取相关的电磁特性数据，研究团队运用矢量网络分析仪对铁磁共振吸收光谱进行了精确测量。当温度 T 低于超导转变温度 T_c 时，所测得的铁磁共振光谱结果如图 1.5(e) 所示。令人意外的是，在该光谱中清晰地观测到了两个铁磁共振信号，其中以黑点标识的被命名为“FMR I”，以红点标识的则被称作“FMR II”。进一步的研究表明，当温度升高至 $T > T_c$ 时，原本分离的这两种模式会合并为单一信号，这一显著的变化充分彰显了超导体在该体系中所发挥的独特作用。

Golovchanskiy 等人借助镜像法对该效应予以阐释。其核心观点为，超导体对坡莫合金（Py）内铁磁共振（FMR）所施加的影响，与超导体内部产生的镜像磁化强

度所引发的影响等效。此时，超导体被视作理想抗磁体。所以，在超导体内部，磁感应强度 $\mathbf{B} = 0$ 。由此，外部施加的磁场 \mathbf{H} 会在超导体条带内部各处感应出等效磁化强度 $\mathbf{M}_{sc}(H) = -\mathbf{H}$ 。鉴于样品安置于超导铌 (Nb) 波导顶部，每一个带有感应磁化强度 \mathbf{M} 的超导条带，都存在一个相对于超导波导表面的镜像，如图 1.5(b) 的下半部分所示。这些感应产生以及镜像的磁化强度 \mathbf{M} ，会在坡莫合金薄膜中沿 $\hat{\mathbf{x}}$ 方向释放出静态杂散磁场（偶极场），如图 1.5(b) 下半部分中的黑色箭头所示。然而，在该分析过程中，超导体对坡莫合金薄膜内动态磁化强度的作用被忽略了。周期性分布的超导体条带将铁磁薄膜划分为两个不同区域：其中在区域 I 中，坡莫合金被带有其镜像的超导体条带所覆盖，而在区域 II 中，坡莫合金未被超导体覆盖。区域 I 与区域 II 环境的差异，意味着两者具有不同的磁化动力学特性。具体而言，区域 I 中的超导条带在坡莫合金薄膜内沿 $\hat{\mathbf{x}}$ 方向感应出的平均磁场为 $H_I(H) \approx 0.18H$ ，区域 II 中的平均磁场则为 $H_{II}(H) \approx -0.27H$ 。因此，通过把公式 (1.75) 中的 H 分别替换为 $H + H_I(H)$ 与 $H + H_{II}(H)$ ，能够对实验数据进行拟合，这两种替换分别对应着两种铁磁共振情形。如图 1.5(e) 中的虚线曲线所示，经过磁场重整化处理的 Kittel 公式 (1.75)，在低磁场 $\mu_0 H < 10 \text{ mT}$ 的条件下，与测量结果契合度良好。然而，当 $\mu_0 H > 10 \text{ mT}$ 时，拟合结果与实验数据之间出现偏差。这极有可能是由于在第一超导临界场 H_{c1} 之上，超导体的完全抗磁性遭到破坏。在此状况下，磁通量开始以涡旋 (Abrikosov vortices) 的形式穿透超导条带，同时铌条带针对外界磁场的理想抗磁响应也被破坏。故而，当 $\mu_0 H > \mu_0 H_{c1} \approx 10 \text{ mT}$ 时，Golovchanskiy 等人通过固定超导体在 H_{c1} 处的抗磁响应来调整拟合方式，即运用公式 (1.75)，将 H 替换为 $H + H_I(H_{c1})$ 和 $H + H_{II}(H_{c1})$ 。在高磁场条件下，两者的拟合效果均十分理想，如图 1.5(e) 中的实线曲线所示。作者着重指出，这种铁磁共振谱呈现出非线性特征，原因在于当 $H < H_{c1}$ 和 $H > H_{c1}$ 时，其表现出不同特性，这一点在图 1.5(e) 的插图也有所反映，其中两个区域的铁磁共振频率差 $\Delta f_r = f_I - f_{II}$ ，在磁场从 0 变化至 10 mT 的过程中迅速增大，随后在更高磁场下缓慢减小。

最近，Borst 等人借助金刚石中的点缺陷 (NV center)，成功观测到了磁振子频率的偏移现象^[95]。他们所搭建的实验装置如图 1.6 所示。两条金 (Au) 条带，放置在钇铁石榴石 (YIG) 薄膜上，用作自旋波的发生器。在两条金 (Au) 条带中间，放置了一层钼铼 (MoRe) 超导薄膜，该薄膜用作充当自旋波调制器。为实现对自旋波

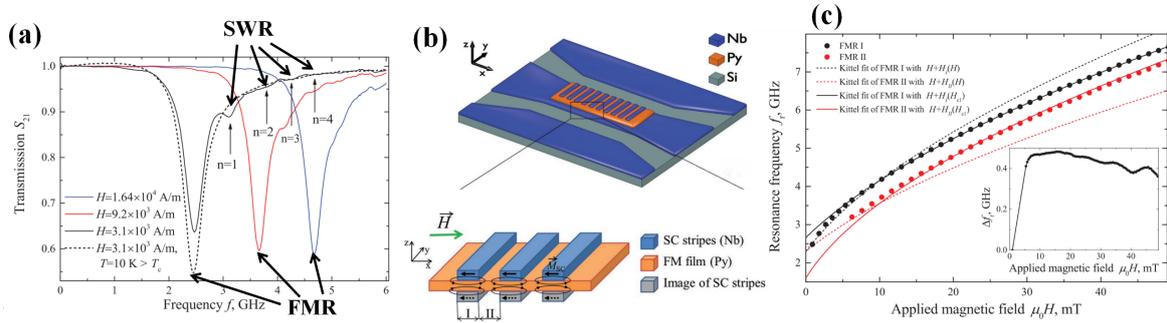


图 1.5 在几个固定磁场 H 下，不同微波频率 f 对应的微波传输系数 S_{21} . (b) 磁子晶体的示意图及其唯象模型 (c) 铁磁共振 (FMR) 频率与外部磁场 H 的依赖关系。
图片来源: 图 (a) 源于文献^[94], 图. (b), (c), 源于文献^[65]。

的成像目的，在样品顶部还包含了一层很薄具有点缺陷的金刚石膜。通过向位于左侧的金条带施加微波电流，具有波矢 $\kappa = k_y \hat{y}$ 的自旋波被成功激发，并朝着右侧传播，如图 1.6(b) 所示。从图 1.6(b) 中可以清晰地观察到，当 $T > T_c$ (T_c 为超导临界温度) 时，自旋波在 MoRe 薄膜下方能够正常地向右传播，且波长未发生任何变化。然而，当 $T < T_c$ 时，MoRe 条带下方的自旋波受到了强烈的调制，具体表现为自旋波的波长出现了明显的改变。这种波长的变化有力地证实了 Yu 和 Bauer 所预测的频率偏移^[52]，这一点我们可以从图 1.6(c) 中得到理解。当自旋在超导体下方传播时，其色散特性发生了变化，如图 1.6(c) 中的蓝线所示。然而，由于自旋波被恒定频率的微波所激发，所以自旋波的频率本身并不会改变。为了与超导体内部的色散情况相匹配，自旋波的波长发生了相应的变化，如图 1.6(c) 所示。此外，通过沿 \hat{z} 方向对图像进行平均处理，可以在图 1.6(d) 中可以清晰地看到自旋波的变化，并且从中发现了一些新奇的现象。根据图 1.6(d)，令人感到奇怪的是，在超导条带左右两侧的自旋波振幅似乎并没有出现衰减的情况。这一现象很可能意味着自旋波的传播距离相较于正常情况要更长。针对这个问题，我们仔细计算了超导体-铁磁体双层系统中自旋波的传播长度。研究表明，磁振子的群速度和寿命决定了自旋波的传播长度。超导体对自旋波寿命的影响不大，但门控效应会使频率发生偏移，并极大地提高群速度。通过这种方式，自旋波的传播长度可以提高数倍，甚至达到毫米级别，我们将在第 2 章对此进行详细的讨论。

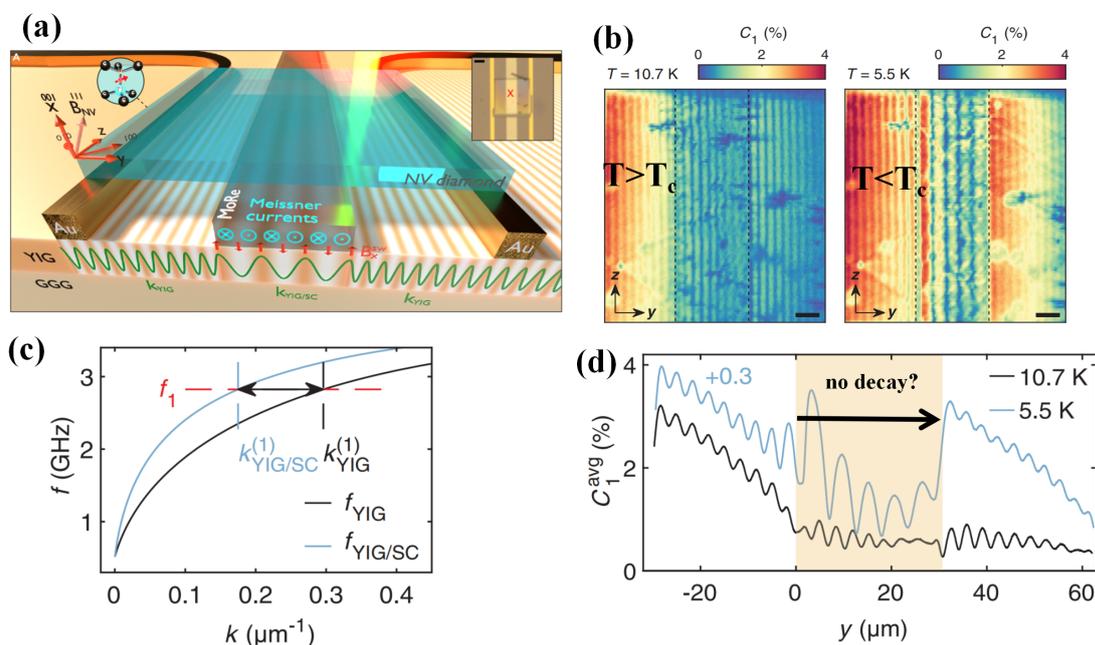


图 1.6 实验装置的总体示意图。(b) 展示了在超导居里温度 T_c 之上和之下，自旋波的空间分布图。(c) 在钇铁石榴石 (YIG) 薄膜中，其自旋波色散为 f_{YIG} ；而当 YIG 薄膜被超导体覆盖时，其色散被调制为 $f_{\text{YIG/SC}}$ 。研究发现，超导体的存在会导致自旋波的色散向上移动，这种变化具体表现为在激发频率 f_1 不变这一特定条件下，自旋波的波长出现了减小的现象。(d) 是对 (b) 中沿 \hat{z} 方向进行平均后的数据，超导条带用黄色阴影表示，我们发现在超导条带之间的自旋波振幅似乎没有衰减。图片来源：图片源于文献^[95]。

1.3.2 超导-铁磁-超导三层异质结构

1.3.2.1 实验进展

在 2018 年，Sun 等人^[68] 研究了一系列超导-铁磁异质结构中的铁磁共振现象。如图 1.7 所示，他们制作了一个超导-铁磁-超导异质结构，其由两层厚度为 100 纳米的铌 (Nb) 超导层和一层厚度为 20 纳米坡莫合金 ($\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$) 铁磁层组成。该异质结构制作在二氧化硅 (SiO_2) 衬底上。铁磁共振是在 X 波段 (约 9 GHz) 的谐振腔中测量的，其中，超导转变温度 T_c 约为 8.7 K。从图 1.7 可以看出，当温度高于 T_c 时，共振场随温度的变化很小。然而，当温度降至 T_c 以下时，共振场 H_r 迅速向下偏移。当温度约为 4.2 K 时，与高于 T_c 时的 H_r 相比，共振场发生了巨大偏移，偏移场约为 70 mT，这与高于 T_c 时的铁磁共振场的一半相当。这种巨大的偏移表明超导体对磁化动力学有很强的调制作用。之后在 2019 年^[69]，Blamire 等人进行了类似的实验，他们将铌-坡莫合金-铌三层结构沉积在热氧化的硅衬底上。其中铌 (Nb) 膜

的厚度 $t_{Nb} = 100$ 纳米，与它的伦敦穿透深度相当，而 $Ni_{80}Fe_{20}$ 的厚度 $t_{py} = 15$ 纳米。整个样品附着在共面波导上，而外加的直流磁场 H 平行于薄膜平面，当发生铁磁共振时，相同频率的微波会被铁磁体所吸收，因此，他们通过在固定微波频率 $f \sim 5-20GHz$ 的情况下扫描外部静态磁场 H ，以测量微波的传输性质的方式测量其铁磁共振（FMR）谱。他们发现，当 $T > T_c$ (T_c 为超导临界温度) 时，线宽和共振场几乎与温度无关，而当 $T < T_c$ 时，共振场朝着更低的方向偏移。具体来说，当 $f = 20GHz$ 且温度降至 2 K 时，共振场偏移约 30 mT，当 $f = 10GHz$ 时，偏移量约为 45 mT，频率越低，共振场的偏移越明显。Golovchanskiy^[96] 等人从另一个角度验证了该现象，与之前实验固定频率，测量共振场的方式不同，在实验中，他们固定了外加的磁场，通过扫频的方式确认了超导-铁磁-超导三层异质结的 FMR 频率。在实验中，他们分别测试了三个不同厚度的样品，其中样品为 Nb(110 纳米)-Py(19 纳米)-Nb(110 纳米)，(b) 样品为 Nb(140 纳米)-Py(45 纳米)-Nb(140 纳米)，(c) 样品为 Nb(110 纳米)-Py(350 纳米)-Nb(110 纳米)。他们发现，当温度降低到 T_c (超导临界温度) 以下时，共振频率会向更高频率偏移。其偏移量随着铁磁层和超导层厚度的增加而增强。与 $T > T_c$ 时相比，当 $\mu_0 H = 40$ mT 且 $T \sim 2$ K 时，构型的频率偏移约 5GHz；然而，在 (b) 中频率偏移变为 $\sim 9GHz$ ，在 (c) 中，仅当 $T \sim 8$ K 时频率偏移就达到了 $\sim 12GHz$ ，为该现象提供了更多的实验线索。然而，该效应对于结构配置十分敏感。例如，如图 1.7(b) 所示，当其中一层超导体的厚度变为 0，即在超导体-铁磁体双层结构中，铁磁共振偏移消失（或仅有轻微偏移），同样的频率偏移消失的现象也发生在超导体-铁磁体-绝缘体-超导体多层结构中，如图 1.7(c) 所示。该现象也得到了 Golovchanskiy 等人的验证^[69,96,96,97]。

超导体-铁磁体-超导体（SC-F-SC）异质结构中铁磁共振（FMR）的巨大偏移显示出磁振子与超导体之间的超强耦合。不仅如此，我们还可以在多层 SC-F 异质结构中实现光子与磁振子的耦合。2021 年，Golovchanskiy 等人^[70] 将一系列由绝缘体-超导体-铁磁体-超导体（I-SC-F-SC）多层组成的样品放置在 140 纳米厚的铌（Nb）波导顶部，并使用矢量网络分析仪测量传输信号 $|S_{21}|(f, H)$ 。其中，外加偏置场沿 \hat{x} 方向，如图 1.8 所示。图 1.8(b)-(d) 展示了在不同 H 下，Si(30) 纳米-Nb(102 纳米)-Py(约 35 纳米)-Nb(103 纳米) 样品（命名为 PM1）在 T_c 以下 [(b,c)] 和 T_c 以上 [(d)] 时的 S_{21} 测量结果。当 $T > T_c$ 时，我们发现有一条单一的吸收

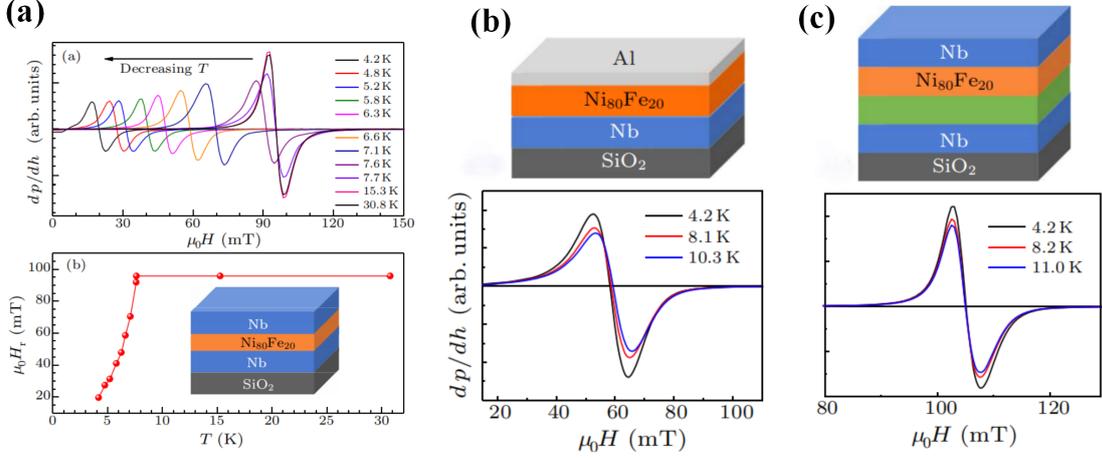


图 1.7 不同异质结构中铁磁共振共振场随温度的变化。图表示在超导-铁磁-超导结构中，当 $T < T_c$ 时，其共振场发生大幅移动，图 (b) 和图 (c) 表示在超导-铁磁双层结构和超导-绝缘体-铁磁-超导三层结构中共振场随温度的变化情况。图片来源：图片来源于文献^[68]。

线，标记为 F 线。F 线代表了铁磁层的传统铁磁共振吸收，因为它遵循 Kittel 关系 $[2\pi f_r^F(H)/(\mu_0\gamma)]^2 = (H + H_a)(H + H_a + M_{\text{eff}})$ ，其中 $f_r^F(H)$ 是铁磁共振频率， μ_0 是真空磁导率， $\gamma = 1.856 \times 10^{11} \text{ rad (Ts)}^{-1}$ 是坡莫合金 (Py) 的旋磁比， H_a 是与外加场方向一致的各向异性场， M_{eff} 是有效磁化强度。拟合数据得出 $\mu_0 H_a \sim 10^{-4}$ 特斯拉可忽略不计， $\mu_0 M_{\text{eff}} = 1.13$ 特斯拉，这对于薄膜中的坡莫合金来说是典型值。然而，当 $T < T_c$ 时，光谱直接发生变化。如图 1.8(b) 所示，存在三条吸收线，大致呈直线的 F 线对应于混合的 SC-F-SC 子系统的铁磁共振吸收，这与当 $T < T_c$ 时 SC-F-SC 异质结构中铁磁共振频率向上偏移的实验结果一致^[68,69,96]。另一方面， S^+ 和 S^- 线呈现出反交叉的图像，表明两个耦合系统之间存在耦合。注意，我们可以将整个 SC-I-SC-F-SC 系统（如图 1.8 所示）分为两个子系统，即 SC-F-SC 子系统和 SC-I-SC 子系统。特别地，在 SC-I-SC 子系统中，光子相速度根据 Swihart 表达式 $\tilde{c} = c_0 \sqrt{d_I/\varepsilon_I(2\lambda_L + d_I)}$ 降低，其中 c_0 是真空中光速， \tilde{c} 是修正后的光速， d_I 是绝缘体层的厚度， ε_I 是绝缘体层的介电常数， λ_L 是超导层的伦敦穿透深度。对于实验样品， $d_I = 30$ 纳米， $\varepsilon_I \sim 10$ ， $\lambda_L = 90$ 纳米，我们得到 $\tilde{c} = 0.12c_0$ ，对于长度 $L = 1.1$ 毫米的谐振器，其谐振频率 $f_r^S = \tilde{c}/2L \approx 17\text{GHz}$ 。这个频率与图 1.8(b) 中零场下微波谐振器的谐振频率完全匹配。因此， S^+ 和 S^- 线对应于在 SC-I-SC 的微波光子与在铁磁 SC-F-SC 谐振器中的磁振子之间发生耦合的结果。

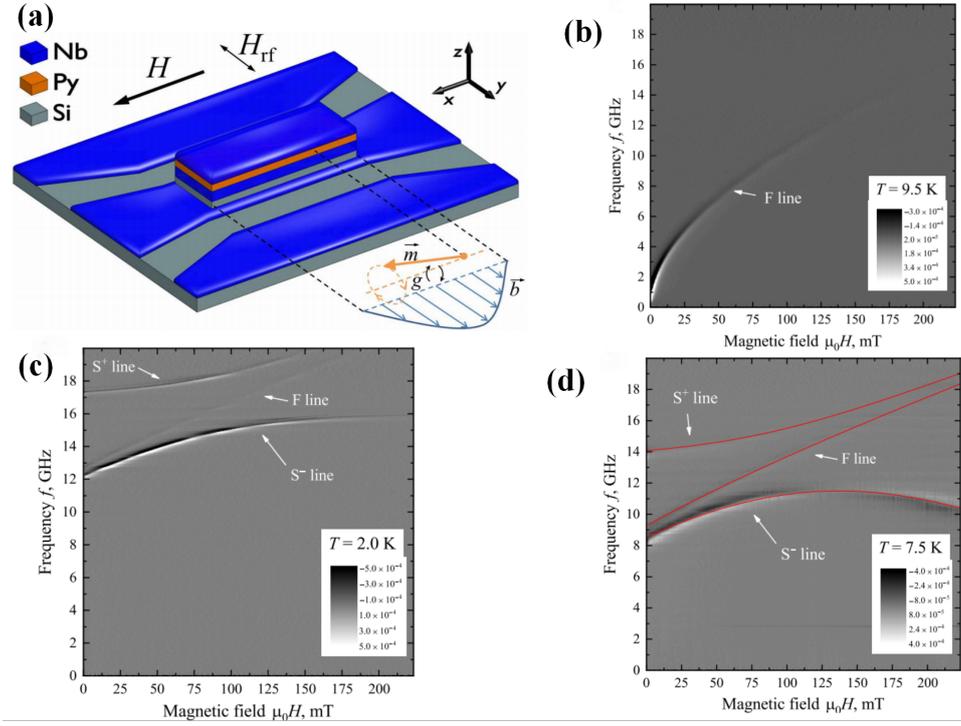


图 1.8 所研究样品的示意图。沿 \hat{x} 轴方向长度 $L = 1.1$ 毫米、沿 \hat{y} 轴方向宽度 $W = 130$ 微米的绝缘体-超导体-铁磁体-超导体 (I-S-F-S) 薄膜样品，直接放置在超导共面波导 (CPW) 中心线的顶部。磁场 H 沿 \hat{x} 方向施加，射频磁场 H_{rf} 沿 \hat{y} 轴方向振荡。橙色箭头表示磁化强度 M ，蓝色箭头表示 SC-I-SC 子系统中 Swihart 模式的磁场分量。 g 项表示光子与磁振子的耦合。(b)-(d) 展示了样品在超导临界温度以上 (b) 及以下 (c 和 d) 所测得的微波传输谱 S_{21} 。图片来源：图片来源于文献[70]。

1.3.2.2 理论进展

在超导-铁磁-超导三层异质结结构中实现的超导-铁磁的超强耦合引起了人们广泛的兴趣，然而该现象的形成原理，以及在超导-铁磁双层结构中消失的特点并没有被很好的理解。

在 2021 年，Mironov 等人[98] 提出，在超导-铁磁-超导三层异质结结构中，超导体可以在铁磁体中诱导出较大的退磁场，进而改变其铁磁共振的频率。为了更好地理解，我们先从一个单层铁磁体薄膜的情况开始讨论。考虑一块具有 $2h \times 2L$ 矩形横截面的无限大铁磁板，并且假定铁磁板内部的磁化强度 M 是均匀的，且方向沿着 \hat{x} 轴。其坐标系如图 1.9(c) 所示。如果样品宽度 $L \rightarrow \infty$ ，那么磁感应强度会被束缚在铁磁体内部，此时 $B = \mu_0 M$ ，而在铁磁板外部 $B = 0$ 。然而，若宽度 L 有限，铁磁板会表现出与杂散磁场（偶极场）相关的退磁效应 [见图 1.9]。我们可以用磁荷法

来估算其产生的退磁场。对于铁磁板，磁荷沿着边界 $x = \pm L$ 均匀分布，面密度分别为 $\sigma = \pm M$ ，并且感应出的杂散场 H 位于 \hat{x} - \hat{z} 平面内。然而，如果 $L \gg h$ ，在铁磁板薄膜中心（在 $x = z = 0$ 处）由于其距离两个磁荷边界都非常远，因此其受到退磁场的影响很弱。事实上，只有在距离 $x = \pm L$ 边缘约 h 的距离处，我们才可以明显观察到退磁效应。当铁磁板（F 板）放置在厚度远超过伦敦穿透深度 λ 的无限大超导体之上时，会出现非常相似的情况 [见图 1.9(b)]。此时铁磁板边缘感应出的杂散磁场会被超导体所屏蔽，进而反过来增加铁磁薄膜中的抗磁效应。通过计算，他们发现与单层铁磁薄膜情况相比，超导体可以使铁磁薄膜中心部分的磁场分量 H_x 加倍。然而，对于远离 $x = \pm L$ 边缘处的退磁效应，这同样可以忽略不计。Mironov 指出，如果厚度 $2h \gg \lambda$ 的铁磁板夹在两块超导体之间，退磁效应会显著增强 [见图 1.9(c)]。在这种情况下，铁磁体边缘 $x = \pm L$ 处的磁荷会在超导体区域中感应出无穷多组镜像磁荷。因此，现在铁磁体内部感应出的磁场 $H = -M$ ，这与单层铁磁薄膜时的情况形成了鲜明的对比，由此可以预测，对于超导-铁磁-超导三层异质结结构，其铁磁共振频率会得到极大地调制。

在 2022 年，Silaev^[67] 在准静态近似下，通过联立麦克斯韦方程组与 LLG 方程，具体求解了超导-铁磁金属-超导异质结中的铁磁共振频率。与 Mironov 的工作不同，如图 1.9 (d) 所示，Silaev 考虑了具有面内磁化的无限大的异质结结构，并且通过考虑在铁磁共振情况下，由超导里的迈斯纳超流产生的随时间变化的磁场 H_ω 所满足的边界条件，得到了此时的 FMR 频率

$$\Omega_{\text{FMR}} = \mu_0 \gamma \sqrt{\frac{(H_0 + M_0)^2 (d_F/2\lambda) \tanh(d_S/\lambda) + (H_0 + M_0) H_0}{(d_F/2\lambda) \tanh(d_S/\lambda) + 1}}. \quad (1.76)$$

其中 H_0 为外加磁场， d_S ， $2d_F$ 分别是超导体的厚度及铁磁金属的厚度， λ 为伦敦趋肤深度。将公式 1.76 与实验数据进行拟合，如图 1.9 (e) 所示，其中实线为实验^[96] 的数据，该方程定性地与实验符合。

我们注意到，目前理论上对于该现象的理解还有待完善，Mironov 等人提出了能够定性解释实验的唯象模型，然而缺乏定量的计算。Silaev 虽然给出了具体的方程，然而，其中的机制却不是非常明了，并且，Silaev 宣称在超导-铁磁绝缘体-超导异质结结构中，频率移动现象消失。针对这一问题，我们建立完整的耦合方程组和一套清晰的物理图像，具体解释了目前铁磁共振频率在超导-铁磁-超导异质结结构中发生大幅移动，而在超导-铁磁构型中没有改变的实验现象，并且发现，即使对于

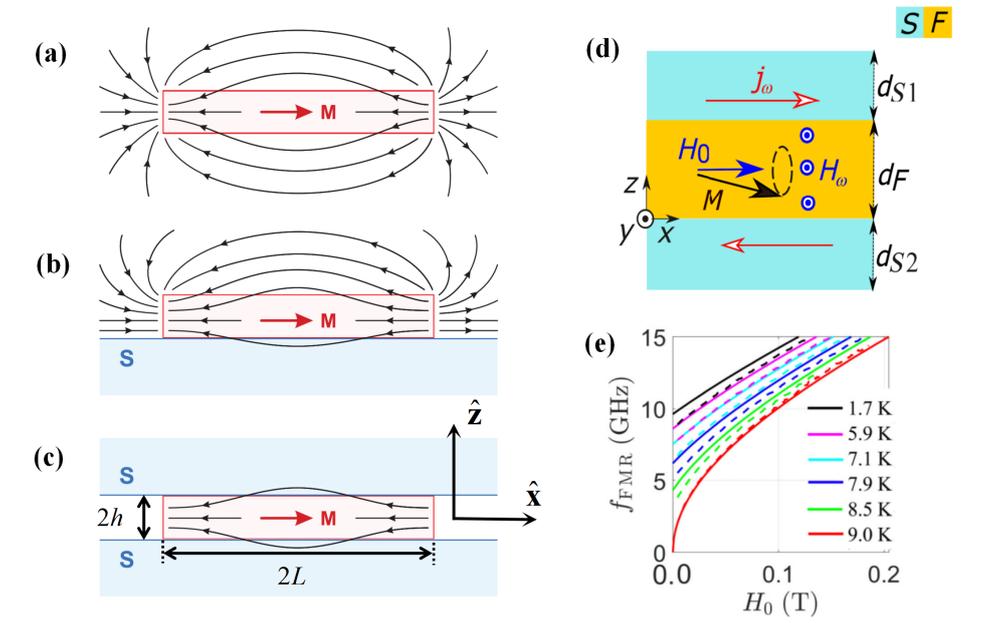


图 1.9 (a-c) 为铁磁薄膜的在不同情况下的退磁场分布。(d) 超导-铁磁金属-超导异质结中的铁磁共振图像，其中超导里的迈斯纳超流会产生额外的磁场 H_w ，进而影响铁磁共振频率。(e) 利用公式 (1.76) 对文献^[96] 中的数据进行拟合的对比结果。图片来源：(a-c) 来源于文献^[98], (d) 与 (e) 来源于文献^[67]。

超导-铁磁绝缘体-超导异质结结构，其铁磁共振频率同样会发生巨大的移动。我们将在第 3 章对此进行详细阐述。

1.4 本文基本结构

本章对铁磁与超导做了简要的介绍，其中详细介绍了考虑偶极相互作用的磁振子的量子化方法，以及超导体电磁近邻效应的唯象理论，并对超导-铁磁双层膜及超导-铁磁-超导三层异质结结构中的电磁近邻效应理论及实验进展做了详细的介绍。

本文第 2 章针对铁磁-超导双层异质结构，建立了一套完整的超导-铁磁系统通过偶极相互作用相互耦合的方程。通过严格考虑边界条件并求解这套方程，我们发现超导能够极大的增加自旋波的群速度，与此同时，超导体对自旋波的寿命的影响却微乎其微，这导致了在铁磁-超导双层异质结构中，自旋波传输距离的极大增强。这一结论与实验结果一致^[95]。基于该理论模型的解析与数值计算结果显示，对于由超导电化铌覆盖的钇铁石榴石薄膜，磁振子的相干输运得到了近 500% 的显著增强，其衰减长度超过毫米量级。

第 3 章针对在实验中发现超导-铁磁-超导异质结构中铁磁共振发生巨大移动,而在超导-铁磁异质结构中移动消失的现象做了详细的解释。从电场辐射的角度出发,当具有面内磁化特性的铁磁绝缘体薄膜发生铁磁共振时,运动的磁矩会在薄膜两侧辐射出振幅相反的电场,而这一电场能够被相邻的超导体强烈调制。当磁性绝缘薄膜仅有一侧与超导体相邻时,辐射电场会发生全反射,并伴有 π 的相移,这导致电场在超导体一侧消失,因此没有电场进入到超导体中,铁磁共振频率不受超导影响。然而,若磁性绝缘薄膜被两个超导体夹在中间,那么电场将会被两个超导来回反射,这使得电场渗入到超导体中,进而驱动迈斯纳超导电流,最终导致铁磁共振频率发生偏移。理论计算表明,钇铁石榴石中的磁振子与氮化铌中的库珀对超导电流之间存在超强耦合,频率偏移可达铁磁共振频率的百分之几十。

第 4 章基于电偶极子与磁偶极子的对偶性,将铁磁体中的表面自旋波概念拓展至铁电体中。通过考虑电偶极矩的长程偶极相互作用,预测了铁电绝缘体中表面极化波,即“铁振子”的存在。研究发现,铁振子的性质与铁磁体中的表面模式,即 Damon-Eshbach 模式存在显著差异。偶极相互作用使得具有动量锁定的圆极化铁振子分支的频率向等离子体频率移动。此外,低频模式为线极化,其极化方向垂直于传播方向。当受到激光束的激发时,低频分支的强各向异性致使电极化呈现特殊的分布模式,并在外部产生手性电场。

第 5 章对本论文的研究内容进行了全面总结。

2 超导调制磁振子输运的研究

正如第 1.3.1.2 节所提到的，在超导-铁磁异质结构中发现的反常输运现象，暗示着超导能够增强磁振子的传输距离，之前的理论（见 1.3.1.1）虽然预言了超导体对自旋波频率的调制现象，然而，对自旋波传输距离的影响却没有被提及，与此同时，在之前的理论计算中，并没有严格考虑超导-铁磁的边界条件。在本章中，我们从自旋波产生电磁辐射的角度出发，通过求解完整的铁磁-超导通过偶极相互作用相互耦合的方程组以及边界条件，我们发现超导确实能够实现对薄铁磁绝缘体中磁振子输运的局部且单向增强，具体原理如图 2.1 所示。经研究发现，自旋波所产生的偶极磁场会被超导体反射，进而增强铁磁绝缘体内的有效磁场。这一过程在不抑制净阻尼的前提下，显著提高了自旋波的群速度。通过理论预测，对于由超导氮化铌（NBN）覆盖的钇铁石榴石（YIG）薄膜，磁振子输运能够实现单向增强，增强幅度高达 450%，其衰减长度超过毫米量级，这一成果远远超越了目前已有的相关记录^[99-102]。考虑到量子输运和量子信息处理通常在低温环境下进行，我们的发现有望提升磁振子在这些领域的应用性能，为相关研究与技术发展提供新的思路与方法。

2.1 超导体对磁化辐射场的反射作用

在本小节，我们通过求解满足超导-铁磁-真空界面边界条件的麦克斯韦麦克斯韦方程组来探究超导体对自旋波辐射偶极场的调制作用。对于超导-铁磁近邻交换相互作用，因其并非我们关注的重点，我们采取在铁磁绝缘体和超导界面处插入如 Al_2O_3 ^[103] 那样的绝缘体，在保证长程偶极相互作用不受影响的情况下对其进行抑制。如图 2.1 所示，在静态外磁场 \mathbf{H}_0 的偏置下，静态磁化 \mathbf{M}_0 指向 $\hat{\mathbf{z}}$ 方向。同时，铁磁绝缘体和超导体的厚度分别用 $2d_F$ 和 d_S 标记。对于铁磁绝缘体中面内横向传播的自旋波，他的磁化可以写为 $M_{x,y}(\mathbf{r}, t) = M_{x,y}(x)e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}e^{-i\omega t}$ ，其中， ω 为振荡频率， $M_{x,y}$ 为振幅，波矢为 $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$ 。对于非常薄的（自旋波长 $\gg 2d_F$ ）铁磁薄膜而言，自旋波的振幅在厚度（ $\hat{\mathbf{x}}$ ）方向上可以看成是均匀的，在这样的情况下， $M_{x,y}$ 通过磁化电流向外辐射电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 。根据麦克斯韦方程组^[30]，辐射的电场遵循方程 $\partial_x^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (k_0^2 - k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\mu_0 \mathbf{J}_M(\mathbf{r}, t)$ 。其中 $k_0 = \omega\sqrt{mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}$ ， μ_0 ， ε_0 ， ε_r 分

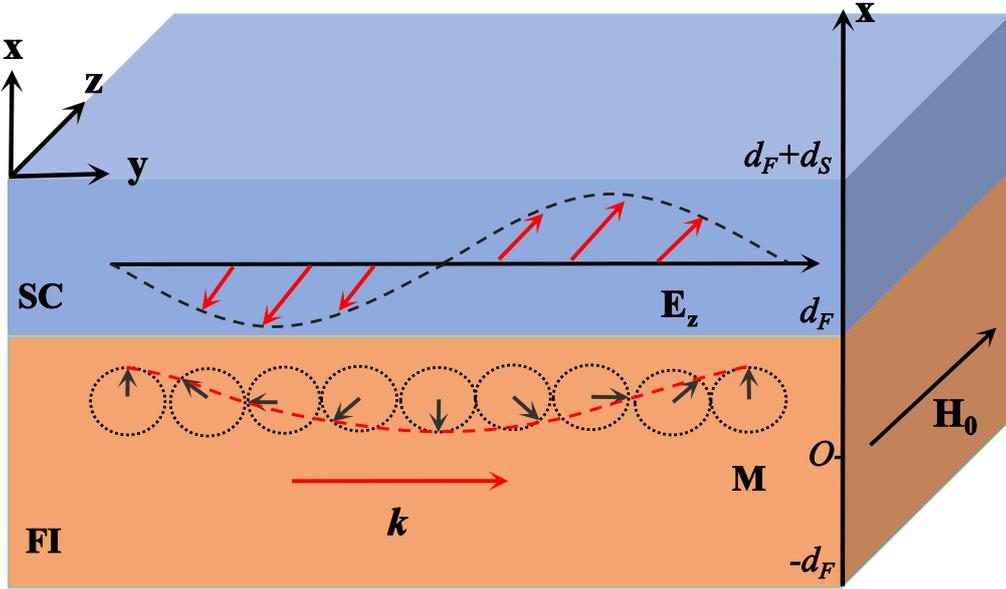


图 2.1 铁磁绝缘体-超导异质结构中磁化动力学和库珀对超导电流之间的耦合。面内的外加磁场 \mathbf{H}_0 使 \mathbf{M}_0 偏置到 \hat{z} 方向. 自旋波沿着垂直于 \mathbf{M}_0 的方向传播, 并且辐射与 \mathbf{M}_0 平行的电场。

别是真空磁导率, 真空介电常数和相对介电常数。以 YIG 材料为例, 即便它拥有相对较大的相对介电常数 $\epsilon_r \sim 10$, 当 $\omega \sim 100$ GHz 时, $k_0 \sim 0.01 \mu\text{m}^{-1}$ 仍然非常小。

我们引入参量 $a_{\mathbf{k}}$ 来描述自旋波运动的椭圆度, 该参量满足关系 $iM_x = a_{\mathbf{k}}M_y$ 。当 $a_{\mathbf{k}} = 1$ 时, 自旋波是圆极化的。不过, 在实际体系中, 由于偶极场和其他有效场的作用, $a_{\mathbf{k}}$ 通常不等于 1。为深入剖析铁磁 - 超导双层膜结构中的电场分布规律, 我们采取逐步研究的策略, 首先聚焦于单层铁磁的情形。通过理论分析与计算, 我们成功推导出自旋波所产生的电场表达式, 具体可写为

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(x)e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - i\omega t}, \quad (2.1)$$

其系数为

$$E_{x/y}^{(0)} = +(-)\frac{\omega\mu_0 M_{y/x} k_z}{2A_k^2} \begin{cases} \alpha_k(x), & x > d_F \\ -2 + \delta_+(k, x), & |x| \leq d_F \\ -\alpha_k^*(x), & x < -d_F \end{cases},$$

$$E_z^{(0)} = \frac{\omega\mu_0 M_y}{2A_k} \begin{cases} (\beta_{\mathbf{k}} - 1)\alpha_k(x), & x > d_F \\ (\delta_+(k, x) - 2)\beta_{\mathbf{k}} + \delta_-(k, x), & |x| \leq d_F \\ (\beta_{\mathbf{k}} + 1)\alpha_k^*(x), & x < -d_F \end{cases},$$

其中 $A_k = \sqrt{k_0^2 - k^2} \rightarrow ik$, $\alpha_k(x) = e^{iA_k(x+d_F)} - e^{iA_k(x-d_F)}$, $\delta_{\pm}(k, x) = e^{-iA_k(x-d_F)} \pm e^{iA_k(x+d_F)}$, $\beta_{\mathbf{k}} = -ia_{\mathbf{k}}k_y/k$ 。当自旋波沿着与 \mathbf{M}_0 垂直的方向传播时，由于在 $k_z = 0$ 的情况下， $E_{x,y} = 0$ ，因此自旋波产生的电场是线极化的，并且极化方向沿着 $\hat{\mathbf{z}}$ -方向。特别的，对于圆极化传播的自旋波， $a_{\mathbf{k}} = 1$ ，这使得系数 $\beta_{\mathbf{k}} \sim -a_{\mathbf{k}}k_y/k = -\text{sgn}(k_y)$ ，即该系数仅取决于自旋波的传播方向。在铁磁薄膜的上方（下方），电场仅在 $k_y > 0$ ($k_y < 0$) 时存在，并且其强度以 $|k_y|^{-1}$ 的衰减长度逐渐减弱；而当自旋波传播方向反转，即 $k_y < 0$ ($k_y > 0$) 时，电场消失。

这种手征电场源于磁化电流 $\mathbf{J}_M(x) = \nabla \times \mathbf{M} = [\delta(x + d_F) - \delta(x - d_F) - k_y]M_y\hat{\mathbf{z}}$ ，该磁化电流由表面电流部分和体电流部分组成。其中，体电流部分为 $-k_yM_y\hat{\mathbf{z}}$ ，它的方向与传播方向 k_y 成正比，此体电流向外辐射电场 E_z ，该电场随着远离铁磁薄膜而逐渐衰减，具体情形如图 (2.2) 中 (a) 和 (b) 所示，并且 E_z 的方向由 k_y 的取值决定。另一方面，表面电流 $\delta(x + d_F)M_y - \delta(x - d_F)M_y$ 分别存在于铁磁薄膜的上表面与下表面，且上下表面电流的方向相反。如图2.2(c) 所示。综合体电流与表面电流的作用效果，当 $k_y > 0$ ($k_y < 0$) 时，由二者共同贡献形成的净电场在铁磁薄膜上方会得到增强（削弱），而在下方削弱（增强），这一特性鲜明地展现出电场分布的单向性特征。

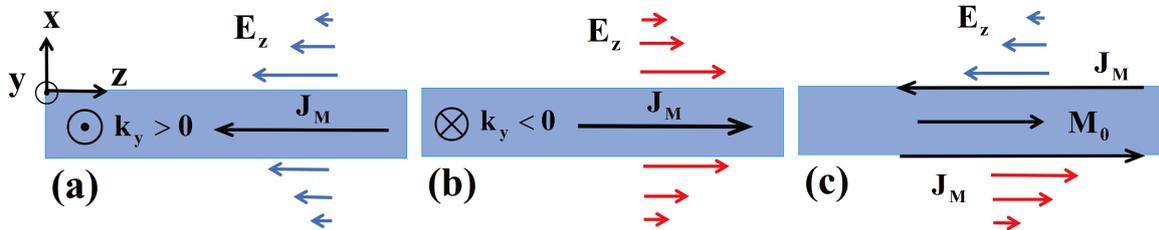


图 2.2 (a, b) $k_y > 0$ 和 $k_y < 0$ 时磁性薄膜中体磁化电流示意图。(c) 磁性薄膜表面磁化电流示意图

接下来，我们将证明单层铁磁薄膜辐射的电场（和磁场），会受到其相邻超导体的强烈作用，具体表现为被反射、聚焦以及增强。在超导体中，依据二流体模型可

知, 当有电场存在时, 超导体中会分别产生“普通”电流 \mathbf{J}_n 和超电流 \mathbf{J}_s 。当体系处于超导转变温度以下时, 温度会对两种电流的分布产生显著影响。具体而言, 温度通过调控超流密度 $\rho_s(T) = \rho_e(1 - (T/T_c)^4)$ 和普通电流密度 $\rho_n(T) = \rho_e(T/T_c)^4$ 来实现这一影响过程, 其中 $\rho_s + \rho_n$ 等于电荷密度 ρ_e 。因此, 超导体的电导率可表示为

$$\tilde{\sigma}(\omega) \approx \frac{\rho_n(T)e^2\tilde{\tau}}{m_e} + i\frac{\rho_s(T)e^2}{m_e\omega} = \sigma_n(T) + i\frac{1}{\omega\mu_0\lambda_L^2(T)},$$

其中 $\tilde{\tau}$ 是电子的弛豫时间, m_e 是电子质量, $\sigma_n(t) = \rho_n(t)e^2\tilde{\tau}/m_e$ 是“普通”电流的电导率, $\lambda_L(T) = \sqrt{m_e/(\mu_0\rho_s(T)e^2)}$ ^[104] 是伦敦穿透深度。体系中的总电流满足 $\mathbf{J} = \tilde{\sigma}\mathbf{E} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$, 通过方程 $\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k_s^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$, 实现对电场的屏蔽, 其中, $k_s = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - 1/\lambda_L(T)^2 + i\omega\mu_0\sigma_n(T)}$ 是超导体中的电磁波波数, 它由 $\lambda_L(T)$ 和 $\sigma_n(T)$ 共同决定。尽管方程从形式上看, 普通电流也有贡献, 然而, 在温度 $T < 0.95T_c$ 的范围内, 普通电流的贡献极其微小, 这是由于 $\sigma_n(T) \propto (T/T_c)^4$, 随着温度的降低, $\sigma_n(T)$ 会快速减小。

另一方面, 在研究电场与超导体相互作用时, 边界条件决定了电场在界面上的反射和透射。根据参考文献^[30], 面内的电场 $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ 在不同的界面上是连续的。对于垂直于界面的电场 E_x , 考虑到在微波频率下, 超导体内部不会出现电荷积累, 所以在超导体内电场遵循方程 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ 。另一方面, $\partial_{\parallel}\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ 同样具有界面连续性, 将此条件与 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ 相结合, 我们得到 $\partial_x E_x(\mathbf{r}, t)$ 在界面处连续。最后, 由于电荷守恒, 电流 $J_x(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0\partial_t E_x(\mathbf{r}, t)$ 在界面处同样保持连续。通过对这些边界条件的细致分析, 我们得以在先前研究的基础上取得新的进展, 为深入理解电场与超导体相互作用的微观机制提供了更坚实的理论依据。

具体来说, 如下所推导的那样, 横向磁化强度的涨落会辐射出电场和磁场。其电场满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2b)$$

对式 (2.2a) 取旋度, 并将其代入式 (2.2b), 我们得到了不同区域内的电场的微分方程

$$\text{在铁磁绝缘体中: } \nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k_0^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\mu_0\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3a)$$

华中科技大学硕士学位论文

$$\text{在真空中： } \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3b)$$

其中 μ_0 是真空磁导率，且 $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 。在超导体内部，根据伦敦方程，电场会驱动产生超电流 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ：

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

根据方程 (2.2a)、(2.2b) 和 (3.3)，超导体内部的电场满足

$$\text{在超导体中： } \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k_s^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

其中 $k_s = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - 1/\lambda_L^2}$ 。

对于平面波， $M_{x,y} \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - i\omega t}$ 成正比。我们假设电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的解具有 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x)e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - i\omega t}$ 的形式，其中

$$\text{在超导中： } \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_1 e^{iB_k x}, \quad (2.6a)$$

$$\text{在铁磁绝缘体中： } \mathbf{E}(x) = \mathbf{U} + \mathbf{E}_0 e^{iA_k x} + \mathbf{E}'_0 e^{-iA_k x}, \quad (2.6b)$$

$$\text{在真空中 } (x < -d_F) : \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_2 e^{-iA_k x}, \quad (2.6c)$$

其中 $A_k = \sqrt{k_0^2 - k^2}$ ， $B_k = \sqrt{k_s^2 - k^2}$ 。在方程 (2.6b) 中，

$$\mathbf{U} = \omega\mu_0 \{-k_z M_y / A_k^2, k_z M_x / A_k^2, -k_y M_x / A_k^2\}$$

是方程 (2.3a) 的特解。另一方面，磁场的分布遵循磁法拉第定律，即 $i\omega\mu_0[\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)] = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ，由此我们得到

$$H_y = 1/(i\omega\mu_0)(\partial_z E_x - \partial_x E_z) - M_y, \quad (2.7a)$$

$$H_z = 1/(i\omega\mu_0)(\partial_x E_y - \partial_y E_x), \quad (2.7b)$$

$$B_x = 1/(i\omega)(\partial_y E_z - \partial_z E_y). \quad (2.7c)$$

其中 $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}'_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ 可通过不同界面处电场和磁场的边界条件来求解。

根据方程(2.2a)和(2.2b)，电场的面内分量 $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ 和磁场的面内分量 $\mathbf{H}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ 在界面处是连续的。另一方面，边界条件要求 $\partial_x E_x(\mathbf{r}, t)$ 在边界处连续，同时 $J_x(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \partial_t E_x(\mathbf{r}, t)$ 也在边界处连续。

华中科技大学硕士学位论文

这些边界条件总结如下。由电场切向分量 $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ 以及 $J_x(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \partial_t E_x(\mathbf{r}, t)$ 在界面处连续, 我们有:

$$\text{真空-铁磁绝缘体界面:} \quad \mathbf{E}_2 e^{iA_k d_F} = \mathbf{E}_0 e^{-iA_k d_F} + \mathbf{E}'_0 e^{iA_k d_F} + \mathbf{U}, \quad (2.8a)$$

$$\text{超导体-铁磁绝缘体界面:} \quad \mathbf{E}_{1\parallel} e^{iB_k d_F} = \mathbf{E}_{0\parallel} e^{iA_k d_F} + \mathbf{E}'_{0\parallel} e^{-iA_k d_F} + \mathbf{U}_{\parallel}, \quad (2.8b)$$

$$\begin{aligned} \text{超导体-铁磁绝缘体界面:} \quad (B_k + k^2) E_{1x} e^{iB_k d_F} &= (A_k + k^2) \\ &\times (E_{0x} e^{iA_k d_F} + E'_{0x} e^{-iA_k d_F} + U_x). \end{aligned} \quad (2.8c)$$

同时, 磁场分量 H_z (见式(2.7b)) 和 H_y (见式(2.7a)) 在界面处的连续性可表述为

$$\text{超导-铁磁绝缘体界面:} \quad H_z|_{x=d_F^+} = H_z|_{x=d_F^-}, \quad H_y|_{x=d_F^+} = H_y|_{x=d_F^-}, \quad (2.9a)$$

$$\text{真空-铁磁绝缘体界面:} \quad H_z|_{x=-d_F^+} = H_z|_{x=-d_F^-}, \quad H_y|_{x=-d_F^+} = H_y|_{x=-d_F^-}. \quad (2.9b)$$

最后, 对于 $\partial_x E_x$ 的连续性, 我们有

$$\begin{aligned} \text{超导-铁磁绝缘体界面:} \quad \partial_x E_x|_{x=d_F^-} &= \partial_x E_x|_{x=d_F^+}, \\ \text{真空-铁磁绝缘体界面:} \quad \partial_x E_x|_{x=-d_F^-} &= \partial_x E_x|_{x=-d_F^+}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

我们首先求解 E_x 。根据真空-铁磁绝缘体界面处 E_x 的边界条件 [方程(2.8a)和(2.10)], 我们有

$$\begin{aligned} (E_{0x} e^{-iA_k d_F} + E'_{0x} e^{iA_k d_F} + U_x) &= E_{2x} e^{iA_k d_F}, \\ (E_{0x} e^{-iA_k d_F} - E'_{0x} e^{iA_k d_F}) &= -E_{2x} e^{iA_k d_F}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

这得出解

$$E_{0x} = -\frac{1}{2} e^{iA_k d_F} U_x = \frac{e^{iA_k d_F} \omega \mu_0 k_z M_y}{2A_k^2}. \quad (2.12)$$

另一方面, 铁磁绝缘体-超导体界面处 E_x 的边界条件 [方程(2.8c)和(2.10)] 要求

$$\begin{aligned} (A_k^2 + k^2)(E_{0x} e^{iA_k d_F} + E'_{0x} e^{-iA_k d_F} + U_x) &= (B_k^2 + k^2) E_{1x} e^{iB_k d_F}, \\ A_k(E_{0x} e^{iA_k d_F} - E'_{0x} e^{-iA_k d_F}) &= B_k E_{1x} e^{iB_k d_F}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

然后, 根据方程(2.12)和(2.13), 我们可以得到

$$E'_{0x} = \frac{U_x}{2} e^{iA_k d_F} [R_k^x (1 - e^{2iA_k d_F}) - 1], \quad (2.14)$$

其中 $R_k^x = [(B_k^2 + k^2)A_k - (A_k^2 + k^2)B_k] / [(B_k^2 + k^2)A_k + (A_k^2 + k^2)B_k]$ 其表示 $E_x(\mathbf{r}, t)$ 在铁磁绝缘体-超导体界面处的反射系数。

接下来我们转而计算 $E_y(\mathbf{r}, t)$ 。真空-铁磁绝缘体界面处 E_y 和 H_z 的连续性 [方程(2.8a)和(2.9b)] 要求

$$\begin{aligned} E_{2y} e^{iA_k d_F} &= E_{0y} e^{-iA_k d_F} + E'_{0y} e^{iA_k d_F} + U_y, \\ E_{2y} e^{iA_k d_F} &= E'_{0y} e^{iA_k d_F} - E_{0y} e^{-iA_k d_F}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

我们得到

$$E_{0y} = -\frac{1}{2} e^{iA_k d_F} U_y = -\frac{e^{iA_k d_F} \omega \mu_0 k_z M_x}{2A_k^2}. \quad (2.16)$$

另一方面, 铁磁绝缘体-超导体界面处的边界条件 [方程(2.8b)和(2.9a)] 可表述为

$$\begin{aligned} E_{0y} e^{iA_k d_F} + E'_{0y} e^{-iA_k d_F} + U_y &= E_{1y} e^{iB_k d_F}, \\ A_k E_{0y} e^{iA_k d_F} - A_k E'_{0y} e^{-iA_k d_F} - k_y (E_x|_{x=d_F^-} - E_x|_{x=d_F^+}) &= B_k E_{1y} e^{iB_k d_F}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

由此我们可以得到

$$E'_{0y} = \frac{U_y e^{iA_k d_F}}{2} [R_k^y (1 - e^{2iA_k d_F}) - 1] - \frac{e^{iA_k d_F}}{A_k + B_k} k_y (E_x|_{x=d_F^-} - E_x|_{x=d_F^+}), \quad (2.18)$$

其中 $R_k^y = (A_k - B_k) / (A_k + B_k)$ 是 $E_y(\mathbf{r}, t)$ 在铁磁绝缘体-超导体界面处的反射系数。其余的系数可通过该方程 (2.8a) 求解

$$\begin{aligned} E_{1y} &= e^{-iB_k d_F} (E_{0y} e^{iA_k d_F} + E'_{0y} e^{-iA_k d_F} + U_y), \\ E_{2y} &= e^{-iA_k d_F} (E_{0y} e^{-iA_k d_F} + E'_{0y} e^{iA_k d_F} + U_y). \end{aligned}$$

最后我们可以求解 E_z 通过方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。具体来说, 在铁磁绝缘体内部, $E_{0z} = -(1/k_z)(k_y E_{0y} + A_k E_{0x})$, $E'_{0z} = (1/k_z)(A_k E'_{0x} - k_y E'_{0y})$ 。

铁磁绝缘体内部的辐射磁场通过朗道-栗弗席兹-吉尔伯特 (LLG) 方程来影响磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ 的动力学。根据法拉第定律 [方程 (2.7c) 和 (2.7a)], 磁场

$$H_x(\mathbf{r}, t) = 1/(i\omega\mu_0)(\partial_y E_z - \partial_z E_x) - M_x$$

$$= \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}-i\omega t}}{\omega\mu_0} (k_y(E_{0z}e^{iA_k x} + E'_{0z}e^{-iA_k x} + U_z) - k_z(E_{0y}e^{iA_k x} + E'_{0y}e^{-iA_k x} + U_y) - M_x), \quad (2.19)$$

$$H_y(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}-i\omega t}}{\omega\mu_0} (k_z(E_{0x}e^{iA_k x} + E'_{0x}e^{-iA_k x} + U_x) - A_k(E_z e^{iA_k x} - E'_{0z}e^{-iA_k x}) - M_y). \quad (2.20)$$

当铁磁薄膜足够薄时，最低阶垂直驻波模式的波动在整个薄膜内几乎是均匀的，因此我们可以对磁场沿 $\hat{\mathbf{x}}$ 方向取空间平均，即 $\mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) = 1/(2d_F) \int_{-d_F}^{d_F} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dx$ ，此时偶极场写为

$$\begin{aligned} H_d^x &= M_x \left\{ -\frac{k^2}{A_k^2} P_k \left[\frac{e^{iA_k d_F}}{2} R_k^y (1 - e^{2iA_k d_F}) - e^{iA_k d_F} \right] - 1 - \frac{k^2}{A_k^2} \right\} \\ &+ M_y \left\{ \frac{k_y R_k^x e^{iA_k d_F}}{2A_k} P_k (e^{2iA_k d_F} - 1) - P_k \frac{k^2 k_y}{2A_k^2 B_k} (R_k^x - R_k^y) e^{iA_k d_F} (1 - e^{2iA_k d_F}) \right\} \\ &= c_{xx}(\mathbf{k}) M_x + c_{xy}(\mathbf{k}) M_y, \end{aligned} \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} H_d^y &= M_y \left\{ -\frac{A_k^2 + k_z^2}{A_k^2} P_k \left[\frac{R_k^x e^{iA_k d_F}}{2} (1 - e^{2iA_k d_F}) - e^{iA_k d_F} \right] \right\} \\ &- \frac{A_k^2 + k_z^2}{A_k^2} - \frac{k_y^2 P_k e^{iA_k d_F}}{2A_k B_k} (R_k^x - R_k^y) (1 - e^{2iA_k d_F}) \left. \right\} \\ &+ M_x \left\{ \frac{P_k R_k^y e^{iA_k d_F} k_y}{2A_k} (1 - e^{2iA_k d_F}) \right\} \\ &= c_{yy}(\mathbf{k}) M_y + c_{yx}(\mathbf{k}) M_x, \end{aligned} \quad (2.21b)$$

其中形状因子

$$P_k = \frac{1}{2d_F} \int_{-d_F}^{d_F} e^{\pm iA_k x} dx = \frac{\sinh(iA_k d_F)}{iA_k d_F}.$$

其中，在线性区域内，沿饱和磁化强度方向的偶极场分量 $H_d^z(\mathbf{r}, t)$ 可忽略不计。

这里，我们集中讨论 $k_z = 0$ 时的 Damon-Eshbach（简称 DE）构型，这是因为在该构型下，自旋波受到超导的调制作用最为显著，且近期已通过实验观测到相关现象^[105]。同样地，对于单层铁磁辐射的电场，只有电场的 $\hat{\mathbf{z}}$ 分量 $E_z \hat{\mathbf{z}} \parallel \mathbf{M}_0$ 存在，如图2.1所示。由单层铁磁层发射的电场（表达式见 (2.1)），会依据依赖于波矢的反射系数 $R_k = (A_k - B_k)/(A_k + B_k)$ 被超导反射。其中， $B_k = \sqrt{k_s^2 - k^2}$ ，并且对于 DE

构型, $k = |k_y|$ 。因此, 在铁磁层内部

$$E_z(\mathbf{r}, t) = E_z^{(0)}(\mathbf{r}, t) + R_k E_z^{(0)}(\mathbf{r}, t)|_{x=d_F} e^{-iA_k(x-d_F)}. \quad (2.22)$$

当 $k \gg \lambda_L^{-1}$ 时。电场按衰减长度 $k^{-1} \ll \lambda_L$ 迅速衰减, 因此 $|A_k| \sim |B_k|$, 此时反射系数 $R_k \sim (A_k - B_k)/(2A_k) \rightarrow 0$, 这意味着超导体反射近乎消失, 即超导体对自旋波几乎不产生影响。而当 $k = 0$ 时, $|A_k| \ll |B_k|$, 此时 $R_k \sim -B_k/B_k = -1$, 这表明电场被超导体完全反射, 并且产生了 π 的相移。这种情况下, 超导体内部不会有超流被驱动, 磁振子与库珀对超电流处于解耦状态。值得注意的是, 即便 k 取值很小, 超导体也能够有效地调制自旋波, 这是由于反射系数会迅速地偏离 -1 。我们发现, 超导体对 $k \sim \lambda_L^{-1}$ 的自旋波的调制最明显。

依据法拉第定律, 变化的电场 (见公式 2.22) 会诱导出磁场 $\mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t)$, 该磁场遵循方程 $i\omega\mu_0[\mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)] = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ^[30]。在铁磁薄膜中, 偶极磁场 $\mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t)$ 以约为 $\sim 1/|k|$ 的衰减长度逐渐衰减, 然而, 在超导体中, 当 $|k| < \lambda_L^{-1}$ 时, 其衰减长度约为 $\sim (k^2 + 1/\lambda_L^2)^{-1/2}$, 这远小于铁磁层中的衰减长度。由此可见, 即便超导体薄膜仅有几十纳米厚, 电磁场在其中的衰减就已至关重要; 相反, 在厚度相近的薄铁磁薄膜中, 衰减的影响程度则没有那么显著。因此, 在铁磁层的研究中, 我们选取杂散场沿厚度 ($\hat{\mathbf{x}}$) 方向的空间平均值

$$\begin{aligned} H_{d,y} &= M_y(P_k e^{-kd_F} - 1) + R_k M_y P_k e^{-kd_F} (1 - e^{-2kd_F}) \frac{1 + a_{k_y} \operatorname{sgn}(k_y)}{2} \\ &\equiv \kappa_y(k_y) M_y, \\ H_{d,x} &= -M_x P_k e^{-kd_F} + R_k M_x P_k e^{-kd_F} (1 - e^{-2kd_F}) \frac{1 + a_{k_y}^{-1} \operatorname{sgn}(k_y)}{2} \\ &\equiv \kappa_x(k_y) M_x, \end{aligned} \quad (2.23)$$

与电场类似, 磁偶极场也可以表示为超导体反射的场与单层铁磁辐射的场的叠加。当 $k_y = 0$ 或 $R_k \rightarrow 0$ 时, 超导体对磁偶极场的影响趋近于零, 此时偶极场恢复到仅有单层铁磁时的情形, 然而, 当 $R_k \rightarrow -1$ 且假设 $a_{k_y} \sim 1$ 时, 磁偶极场会得到增强。一般来说, 无量纲因子 $\kappa_y(k_y) < 0$, $\kappa_x(k_y) < 0$, 这表明超导体能够增强铁磁层中的磁场强度。此时, 偶极场的手性特性表现得极为清晰: 对于圆极化的自旋波且 $a_{k_y} \rightarrow 1$, 当 $k_y < 0$ 时, $[1 + a_{k_y} \operatorname{sgn}(k_y)]/2 \rightarrow 0$, $[1 + a_{k_y}^{-1} \operatorname{sgn}(k_y)]/2 \rightarrow 0$, 然而, 当 $k_y > 0$ 时, 他们趋于 1。

现在，我们通过比较单层铁磁与铁磁-超导双层膜中的磁场分布来说明超导体对杂散场的影响，如图 2.3 (a), (b) 所示。在此，我们设定铁磁层厚度 $d_F = 50 \text{ nm}$ ，超导体 NbN 厚度 $d_S = 300 \text{ nm}$ ，在温度 $T = 1.2 \text{ K}$ （约为 $0.1T_c$ ）时的伦敦趋肤长度 $\lambda_L = 80 \text{ nm}$ ^[106-108]。对于 $k_y = 4 \mu\text{m}^{-1}$ 的自旋波来说，在没有超导的情况下，它的偶极场主要存在于铁磁性薄膜之上，如图 2.3(a) 所示，而当该铁磁薄膜被超导体覆盖后， $x > 0$ 区域的磁场会被反射，并且在超导体内迅速衰减，然后在铁磁膜内增强。作为对比，当 $k_y = -4 \mu\text{m}^{-1}$ 时，如图 2.3(b) 所示，此时的磁场主要位于铁磁薄膜下方 ($x < 0$)，因此几乎不受上方超导体的影响。

杂散场的这种选择性增强现象，可由具有平移不变性系统的一般对称性原理来解释。如图 2.3(c) 和 (d) 所示，在该体系中，超导体的存在打破了围绕饱和磁化方向的双重旋转对称性。然而，垂直于饱和磁化方向的镜面对称性依然得以保持。

2.2 受到调制后的自旋波色散、群速度、寿命和椭圆度

由公式(2.23)所描述的选择性增强的偶极场，对磁化动力学有着极为显著的影响。根据朗道-利夫希茨-吉尔伯特 (LLG) 方程 $\partial_t \mathbf{M} = -\mu_0 \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \alpha_G \mathbf{M} / M_0 \times \partial_t \mathbf{M}$ ，其中 γ 是旋磁比， α_G 是吉尔伯特阻尼常数，而有效磁场 \mathbf{H}_{eff} 包括静态的外加场 $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{z}}$ 、由公式(2.23)所确定的偶极场 \mathbf{H}_d ，以及交换场 $\mathbf{H}_{\text{ex}} = \alpha_{\text{ex}} \nabla^2 \mathbf{M}$ （其中 α_{ex} 是交换系数）。在 LLG 方程中，阻尼项会在本征频率里引入一个额外的虚部，即： $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma_{\mathbf{k}}$ 。当 $\{M_x, M_y\} \propto e^{-i\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}t}$ 时，通过求解 LLG 方程，我们可以得自旋波的本征频率 $\omega_{\mathbf{k}}$ 、 $\Gamma_{\mathbf{k}}$ 和椭圆度 $a_{\mathbf{k}}$ ：

$$\omega(k_y) = \mu_0 \gamma \sqrt{(H_{k_y} - \kappa_x(k_y)M_0)(H_{k_y} - \kappa_y(k_y)M_0)}, \quad (2.24a)$$

$$\Gamma(k_y) = \frac{\mu_0 \gamma \alpha_G}{2} [2H_{k_y} - M_0 (\kappa_x(k_y) + \kappa_y(k_y))], \quad (2.24b)$$

$$a(k_y) = \sqrt{(H_{k_y} - \kappa_x(k_y)M_0)/(H_{k_y} - \kappa_y(k_y)M_0)}, \quad (2.24c)$$

其中 $H_{k_y} = H_0 + \alpha_{\text{ex}} k_y^2 M_0$ 。通过公式(2.24c)，我们可以自洽地求解椭圆率，并且可以通过数值计算进一步得出色散关系 [见公式 (2.24a)] 和自旋波寿命倒数 [见公式 (2.24b)]。当 $k_y > 0$ 时，由于近邻超导体的作用， $\kappa_x(k_y) < 0$ ， $\kappa_y(k_y) < 0$ 且他们的绝对值均有所增大，基于此，从公式 (2.24a)可知，自旋波频率会增加，同时自旋波寿命倒数 [见公式 (2.24b)] 也会增大。然而，尽管观察到这些参数的变化，目前尚

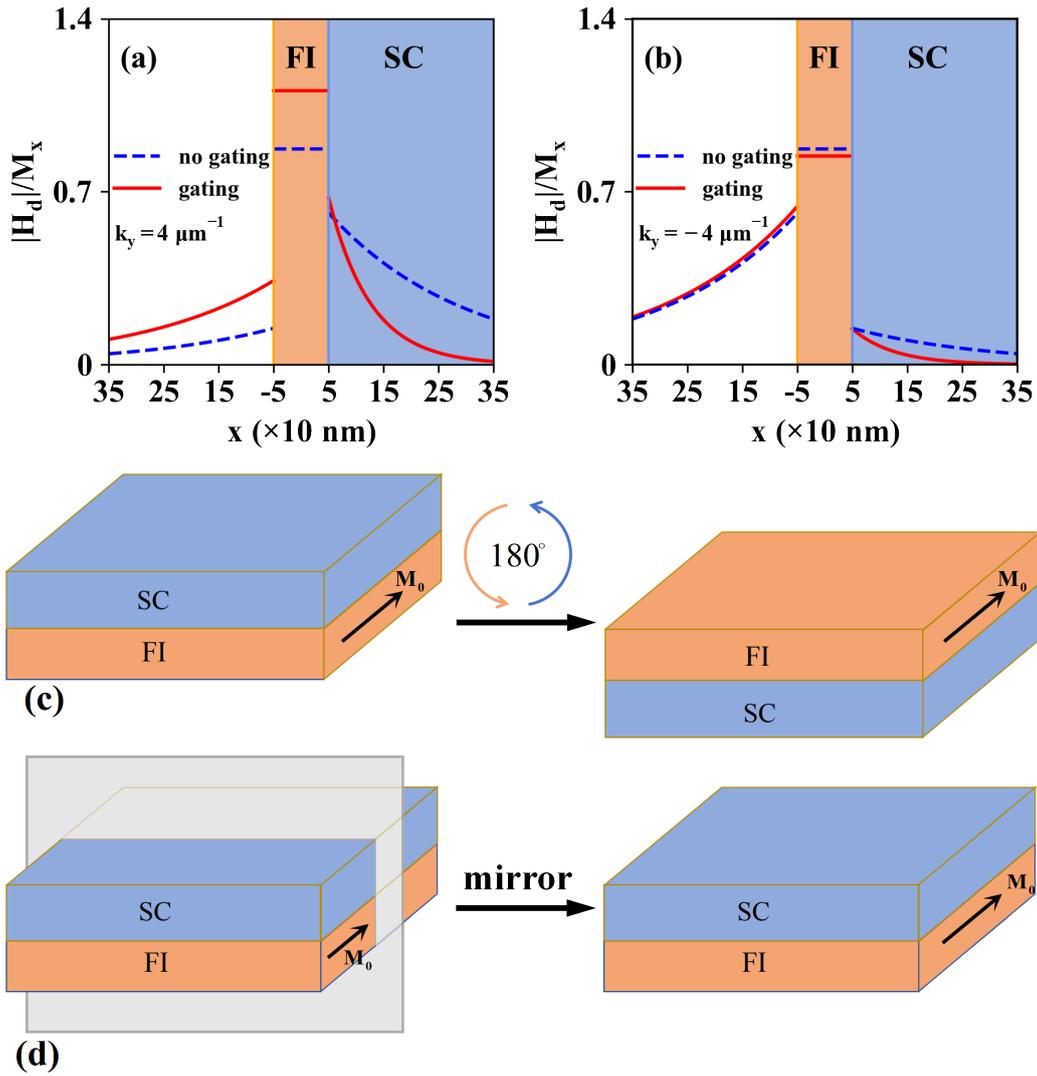


图 2.3 邻近超导体对辐射磁场的选择性增强，其中图 [(a)] 为 $k_y = 4 \mu\text{m}^{-1}$ 的情况，图 [(b)] 为 $k_y = -4 \mu\text{m}^{-1}$ 的情况。其中蓝色虚线表示厚度为 $2d_F = 100 \text{ nm}$ 的单层铁磁绝缘体的磁场。红色曲线表示的是超导体厚度 $d_S = 300 \text{ nm}$ ，穿透深度 $\lambda_L = 80 \text{ nm}$ 的铁磁绝缘体-超导体异质结构的磁场。(c) 和 (d) 展示了具有破缺破缺的二重旋转对称性和镜面对称性的超导-铁磁绝缘体异质结构。

无法明确磁振子的输运是否必然会得到增强。

2.3 磁振子传输距离的增强

接下来，我们计算在与实验^[101,105]类似的配置下，由沿着饱和磁化强度方向的长天线发射的频率为 Ω 的外部奥斯特磁场 $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ 激发的自旋波的特征衰减长度。该奥斯特磁场通过塞曼相互作用 $\hat{H}_{\text{int}} = -\mu_0 \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ 与自旋波耦合。根据线性响应理论，奥斯特磁场的傅里叶分量为 $h_\beta(x, k_y, \Omega) = (1/L) \int dy e^{-ik_y y} h_\beta(y)$ ，其中 L 是天线的长度，此时，激发的磁化强度为：

$$M_\alpha(x, k_y, \Omega) = \mu_0 (\gamma \hbar)^2 \int_{-d_F}^{d_F} dx' \chi_{\alpha\beta}(x, x', k_y, \Omega) h_\beta(x', k_y, \Omega), \quad (2.25)$$

其中自旋磁化率为：

$$\chi_{\alpha\beta}(x, x', \mathbf{k}, \omega) = -\frac{2M_0}{\gamma \hbar^2} M_\alpha^{\mathbf{k}}(x) M_\beta^{\mathbf{k}*}(x') \frac{1}{\Omega - \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}}. \quad (2.26)$$

其中，自旋波模式的归一化振幅为

$$M_y^{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\sqrt{2d_F}} \frac{1}{\sqrt{a_{\mathbf{k}}}}, \quad M_x^{\mathbf{k}} = -\frac{i}{2\sqrt{2d_F}} \sqrt{a_{\mathbf{k}}}.$$

通过对傅里叶分量求和，我们得到实空间中激发的磁化强度：

$$\begin{aligned} M_\alpha(y, t) &= \sum_{k_y} e^{ik_y y} M_\alpha(k_y, t) = 4iL\mu_0\gamma d_F M_0 \\ &\times M_\alpha^{k_\Omega} M_\beta^{k_\Omega*} \frac{1}{v_{k_\Omega}} e^{i(k_\Omega y - \Omega t)} e^{-\tilde{k}_\Omega y} h_\beta(k_\Omega), \end{aligned} \quad (2.27)$$

在这个表达式中， $\tilde{k}_\Omega = k_\Omega + i\tilde{k}_\Omega$ 是方程 $\tilde{\omega}(\tilde{k}_\Omega) = \Omega$ 的正根， $v_{\mathbf{k}} = \partial\omega(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}$ 是自旋波的群速度。 $\lambda = 1/\tilde{k}_\Omega$ 决定了激发磁化强度的衰减长度。

我们通过以下方式求解 \tilde{k}_Ω ，通过线性化的 LLG 方程：

$$\begin{aligned} -i\omega M_x + \mu_0 \gamma H_{k_y} M_y &= \mu_0 \gamma M_0 \kappa_y(k_y) M_y + i\alpha_G \omega M_y, \\ i\omega M_y + \mu_0 \gamma H_{k_y} M_x &= \mu_0 \gamma M_0 \kappa_x(k_y) M_x + i\alpha_G \omega M_x, \end{aligned}$$

从该方程出发，本征频率 $\tilde{\omega}(\tilde{k}_y)$ ，由特征方程

$$\tilde{\omega}^2(k_y) = \left[\mu_0 \gamma (H_{k_y} - M_0 \kappa_y(k_y)) - i\tilde{\omega}(k_y) \alpha_G \right]$$

$$\times [\mu_0\gamma(H_{k_y} - M_0\kappa_x(k_y)) - i\tilde{\omega}(k_y)\alpha_G]. \quad (2.28)$$

所决定。结合条件 $\tilde{\omega}(\tilde{k}_y) = \Omega$ ，可推导出

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= [\mu_0\gamma(H_{\tilde{k}_y} - M_0\kappa_x(\tilde{k}_y)) - i\Omega\alpha_G] [\mu_0\gamma(H_{\tilde{k}_y} - M_0\kappa_x(\tilde{k}_y)) - i\Omega\alpha_G] \\ &= \omega^2(\tilde{k}_y) - 2i\Omega\Gamma(\tilde{k}_y) - \Omega^2\alpha_G^2 \\ &\approx \omega^2(\tilde{k}_y) - 2i\Omega\Gamma(\tilde{k}_y), \end{aligned} \quad (2.29)$$

由于 $\alpha_G \ll 1$ ，二次项 $\Omega^2\alpha_G^2$ 可以忽略不计。方程的解 $\tilde{k}_y = k_\Omega + i\tilde{k}_\Omega$ 是一个包含小虚部 $\tilde{k}_\Omega \ll k_\Omega$ 的复数，因此 $\Omega\Gamma(\tilde{k}_y) \sim \Omega\Gamma(k_\Omega)$ ，此时，我们可将 $\omega(\tilde{k}_y)$ 展开到一阶：

$$\omega(\tilde{k}_y) = \omega(k_\Omega) + v_{k_\Omega} i\tilde{k}_\Omega \quad (2.30)$$

将公式(2.30)代入公式(2.29)，并使公式(2.29)的实部和虚部分别相等，可以得到 $\Omega = \omega(k_\Omega)$ 和 $\tilde{k}_\Omega = \Gamma(k_\Omega)/v_{k_\Omega}$ 。由此，特征衰减长度为：

$$\lambda = 1/\tilde{k}_\Omega = v_{k_\Omega}/\Gamma(k_\Omega) = v_{k_\Omega}\tau(k_\Omega) \quad (2.31)$$

它仅由群速度和磁振子寿命 $\tau(k) = 1/\Gamma(k)$ 决定。

图 2.4 展示了在 DE 构型下（其中 $\mathbf{k} \perp \mathbf{M}_0$ ），相邻超导体对自旋波的调制特性。在计算中，我们采用厚度为 $2d_F = 100$ nm 的 YIG 薄膜，其饱和磁化强 $\mu_0 M_0 = 0.24$ T^[105,109]，交换系数 $\alpha_{\text{ex}} = 3 \times 10^{-16}$ m²，阻尼系数 $\alpha_G = 10^{-4}$ ^[110]，面内偏置场 $\mu_0 H_0 = 0.05$ T。与之搭配的是厚度为 $d_S = 300$ nm 的超导体 NbN，在温度 $T = 0.1T_c = 1.2$ K^[106-108] 时，伦敦穿透深度 $\lambda_L = 80$ nm。通过对比图3.4(a)中 $T = 0.1T_c$ 时当和没有超导体时的色散关系，我们发现表明只有当 $k_y > 0$ 时，磁振子色散才会强烈上移。在铁磁共振点 $k_y = 0$ 处，由于偶极场被超导体完全反射，共振频率并未发生偏移；而当波矢较大时，交换相互作用占据主导地位，频率偏移现象消失。因此，当 $k_y \sim \lambda_L^{-1}$ 时，频率偏移最大，这导致了群速度出现非单调调制。如图2.4(b)所示：当 $k_y \in [0, \lambda_L^{-1}]$ 时，群速度大幅增强；当 $(k_y \gtrsim \lambda_L^{-1})$ 时，群速度略有抑制。此外，从图 2.4(c) 可以看出，超导对磁振子寿命的调制作用相较于群速度的调制要弱得多，当 $k_y \in [0, \lambda_L^{-1}]$ 时，磁振子寿命略有抑制，当 $k_y \gtrsim \lambda_L^{-1}$ 时，几乎不存在抑制现象。

由公式 (2.31) 可知，磁振子的特征衰减长度由其群速度和寿命共同决定。如

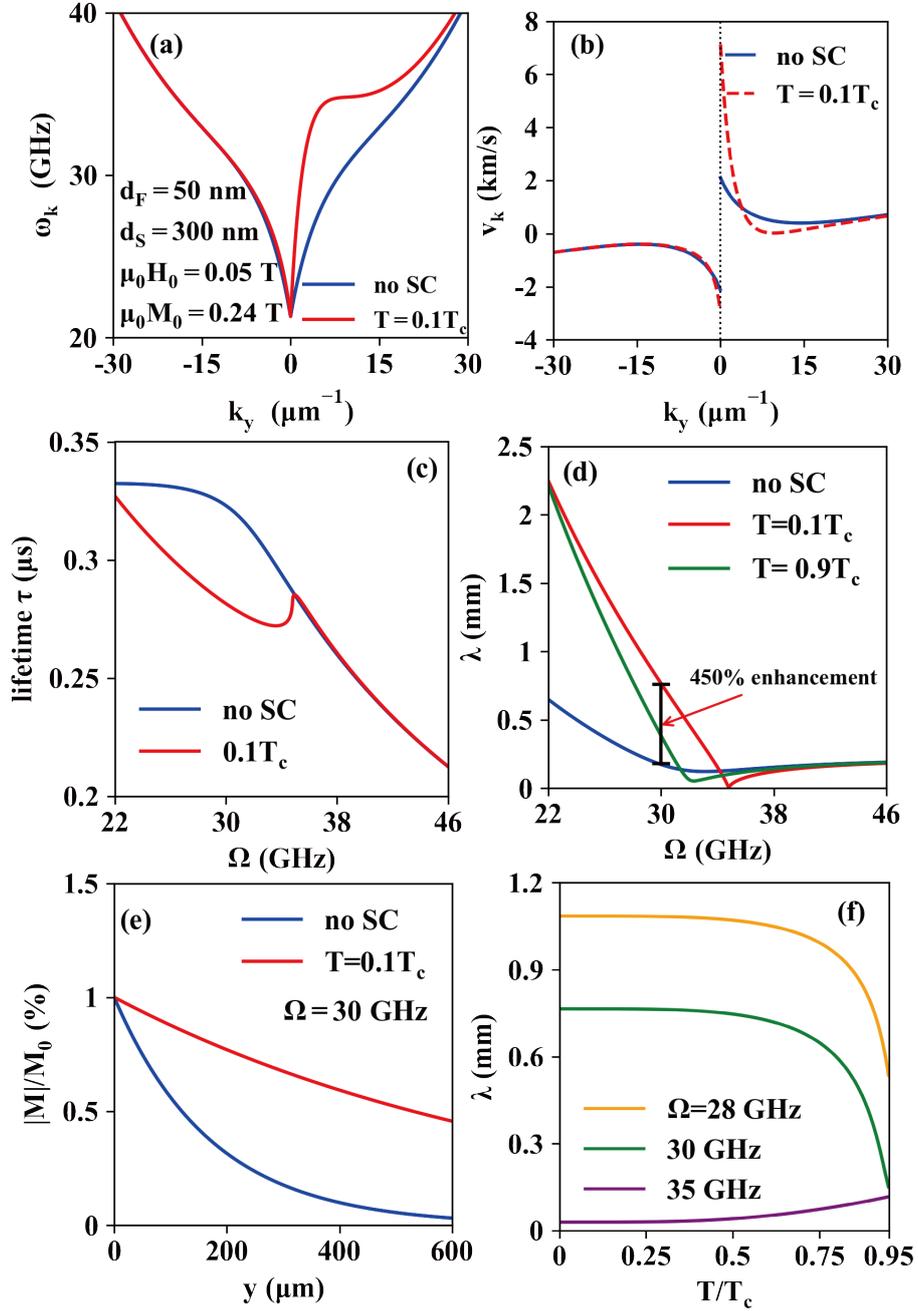


图 2.4 在 D-E ($\mathbf{k} \perp \mathbf{M}_0$) 构型中, 相邻超导体对铁磁绝缘体中磁振子运输的增强作用。(a), (b), 和 (c) 展示了在温度 $T = 0.1 T_c$ 时, 与没有超导体情况相比, 磁振子的频移、增强的群速度和寿命。图 (d), (f) 展示了衰减长度与激发频率和温度的相关性, (e) 展示了在实空间中的特征衰减长度, 表明了相邻超导体的调制作用显著增强了磁振子的运输。

图2.4(e)所示, 由于超导体对偶极场的屏蔽作用, 激发磁化强度的衰减变缓。图 2.4(d)和图 2.4(f)展示了衰减长度对激发频率和温度的强烈依赖关系。当激发波矢 $k_y \lesssim \lambda_L^{-1}$ 时, 超导体通常会增强磁振子输运。值得注意的是, 对于 YIG 材料, 我们估算其磁振子输运的增强幅度可达到 450%, 并且在较低频率的情况下, 衰减长度能够超过毫米量级。

2.4 结论

综上所述, 我们构建了磁振子与超导超电流之间电感相互作用的模型, 并进行了相关计算。在此基础上, 成功预测出一种能够在微波频率下单向增强磁振子输运的有效方法。该方法的核心在于利用相邻超导体对动态偶极场的屏蔽效应, 不仅在具有低耗散的典型铁磁体——钇铁石榴石 (YIG) 中展现出良好的适用性, 而且因其不依赖电荷与自旋 - 轨道耦合的独特机制, 对于电导率相对较低的金属铁磁体同样具有应用潜力^[111]。此外, 部分反铁磁体的频率也处于可控范围之内, 这种调制对于两种极化模式均可能产生作用^[112,113]。目前的调制机制主要基于传统超导体对微波的完全抗磁性, 不过, 这一特性未来或许会被其他具有强抗磁性的材料所替代^[114,115]。本研究成果在超导磁振子学领域具有重要的科学价值与潜在应用前景, 有望为科研人员深入探索磁振子片上量子信息处理与输运等前沿课题提供新的理论基础与研究思路。

3 超导调制铁磁体中铁磁共振的研究

从第1.3.2节可以看出，对于超导-铁磁系统中的铁磁共振现象，一个明显的特征是在超导-铁磁-超导异质结构中，其铁磁共振的频率有非常大的移动，然而该移动在超导-铁磁双层结构中消失。与此同时，对于该现象的理论解释却依赖于较大的近似，并且，其背后的物理机制并不清晰。在本章中，我们深入阐释了在超导-铁磁-超导异质结构实验里，铁磁共振频率发生显著频移，而这一频移在铁磁-超导双层膜中却并未出现的实验现象^[68,69,96]。我们经理论分析预测，在具有面内磁化的绝缘磁性薄膜中，铁磁共振过程会在磁性绝缘体两侧激发出沿磁化方向极化、振幅呈相反状态的电场。值得注意的是，该电场极易受到相邻超导体的强烈调制。具体而言，当仅有一个超导体与磁性绝缘体相邻时，这种辐射电场会发生具有 π 相移的全反射，导致其在超导体一侧完全消失，自然也就不会对铁磁共振产生任何影响。然而，当磁性绝缘体被两个超导体夹在中间时，情况截然不同。此时，这种反射会在两个超导体之间来回持续进行，致使在两个超导体处均存在电场。此电场能够驱动迈斯纳超导电流，进而有效地改变铁磁共振的特性。进一步地，我们预测在钇铁石榴石中的磁振子与氮化铌中的库珀对超导电流之间，将会出现超强耦合的现象，其频率偏移幅度可达铁磁共振本征频率的百分之几十。

3.1 模型和基本公式

我们考虑一种异质结构，它由厚度为 $2d_F \sim O(100 \text{ nm})$ 的面内磁化铁磁绝缘薄膜以及分别位于其两侧、厚度为 $d_S \lesssim \lambda$ 和 $d'_S \lesssim \lambda$ 的两个薄超导层组成，如图3.2所示。这里 $\lambda \sim O(100 \text{ nm})$ 是常规超导体的伦敦穿透深度。在铁磁绝缘体中，磁化强度 $\mathbf{M} = M_x \hat{\mathbf{x}} + M_y \hat{\mathbf{y}} + M_0 \hat{\mathbf{z}}$ （其中 M_0 为饱和磁化强度）的动力学由朗道 - 里夫希茨 - 吉尔伯特 (LLG) 方程^[116] 唯象地描述：

$$\partial \mathbf{M} / \partial t = -\mu_0 \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \alpha_G (\mathbf{M} / M_0) \times \partial \mathbf{M} / \partial t, \quad (3.1)$$

其中， μ_0 是真空磁导率， $-\gamma$ 是电子旋磁比， α_G 是磁性绝缘体的阻尼系数。磁化强度围绕有效磁场 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{app}} + \mathbf{H}_r$ 进动，其中 $\mathbf{H}_{\text{app}} = H_0 \hat{\mathbf{z}}$ 是外部静态场， \mathbf{H}_r 是由“磁

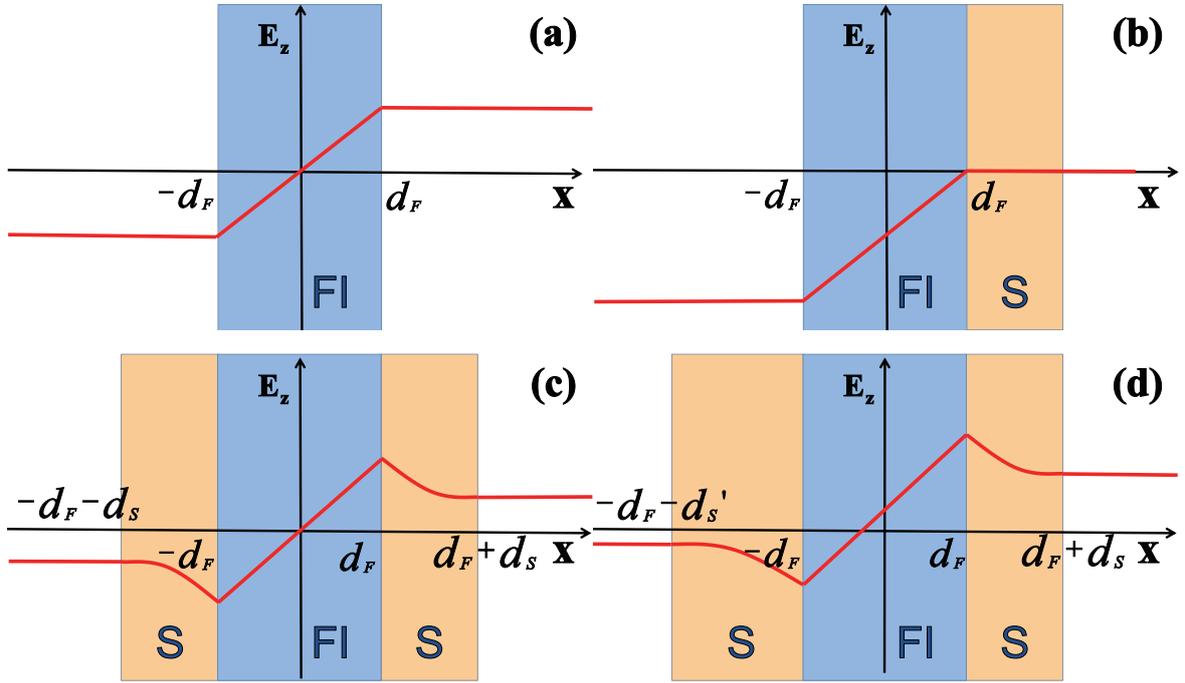


图 3.1 不同异质结配置下磁化辐射电场的示意图。电场在铁磁绝缘薄膜的厚度方向上呈线性变化。其中 (a) 薄磁绝缘体两侧的电场振幅相反。(b) 在铁磁绝缘体上覆盖一层超导薄膜时，电场在超导体一侧被抑制至消失，但在磁体另一侧增强。当磁体被两个超导体夹住时，即相同超导体厚度 (c) 和不同超导体厚度 (d) 的配置中，电场都存在，但两侧的电场不同。

偶极辐射”产生的辐射动态场^[30,117]。由于辐射出的磁场与磁化强度相位不同，这会对磁化强度施加类似阻尼的力矩，从而使磁性绝缘体的能量耗散，产生辐射阻尼。另外，在铁磁共振中，由于均匀进动时 \mathbf{M} 的梯度为零，交换相互作用不起作用。根据^[30]，振荡的磁感应强度 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})$ ，它决定了铁磁绝缘体内外的电场辐射

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

其中 ε_0 是真空介电常数。当与超导体耦合时，该电场通过伦敦方程^[118]驱动超电流 \mathbf{J}_s ：

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B}. \quad (3.3)$$

在不同温度 $T < T_c$ 下，伦敦穿透深度^[118]遵循以下关系

$$\lambda(T) = \lambda_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right)^{-1/2}, \quad (3.4)$$

其中， λ_0 是零温下的伦敦穿透深度。

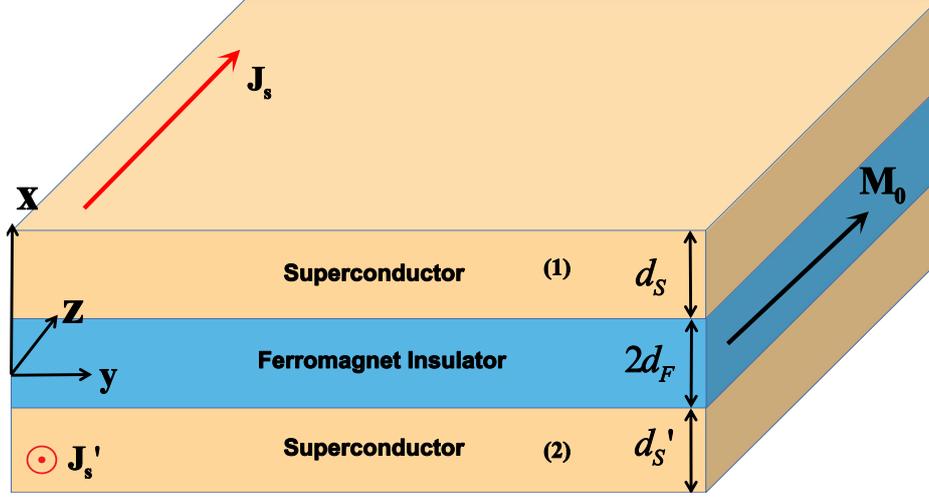


图 3.2 超导-铁磁绝缘体-超导异质结构。厚度为 $2d_F$ 的薄铁磁绝缘体上下方的超导体厚度分别为 d_S 和 d'_S 。由铁磁共振驱动的超电流 \mathbf{J}_s 和 \mathbf{J}'_s 沿磁化方向反向流动。

边界条件描述了界面处的电磁场行为^[30]。对于磁感应强度和磁场， \mathbf{B}_\perp 和 \mathbf{H}_\parallel 在边界处是连续的。同时，由于不存在表面电流或电荷积累，电场 \mathbf{E} 在界面处也是连续的。

在低频和近场情况下，我们通常采用准静态近似^[30]，在这种情况下，辐射阻尼应该非常小。这在第 3.2.1 节计算辐射阻尼时得到了验证。因此，将辐射磁场表示为偶极场和超导体产生的奥斯特场的叠加就足够了^[116]。其中偶极场：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{d,\beta}(\mathbf{M}) &= \frac{1}{4\pi} \partial_\beta \sum_\alpha \partial_\alpha \int d\mathbf{r}' \frac{M_\alpha(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial_\beta \int d\mathbf{r}' \frac{-\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\end{aligned}\quad (3.5)$$

它由根据磁荷 $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ 定义的库仑定律来描述。

在准静态近似下，超导体中 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$ 。对公式 (3.2) 取旋度并代入公式 (3.3)，可得超导体内部的电场满足：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mathbf{E}/\lambda^2 = 0. \quad (3.6)$$

另一方面，对 $(\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s)$ 取旋度，结合公式 (3.3)，可得超导体内部的磁感应强度满足 $\nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{B}/\lambda^2 = 0$ 。被驱动的超电流会在超导体内部产生矢势。对于均匀磁

化进动，系统在 y - z 平面内具有平移不变性，因此超电流仅取决于 x 。并且产生矢势

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}_s(x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.7)$$

相应地，奥斯特磁场

$$\mathbf{H}_s = (1/\mu_0)\nabla \times \mathbf{A} \quad (3.8)$$

仅包含分量 $H_y = -\partial_x A_z(x)/\mu_0$ ，它会驱动磁化 \mathbf{M} 。

3.2 单层铁磁绝缘体薄膜

我们从单个绝缘铁磁薄膜入手，研究均匀磁化进动产生的显著辐射电场。对于一个厚度为 $2d_F$ 、由静态磁场 $\mathbf{H}_{\text{app}} = H_0 \hat{\mathbf{z}}$ 偏置的单层铁磁绝缘体，在铁磁共振中，由于磁矩 \mathbf{M} 是均匀的，并且有恒定的退磁因子 $N_{xx} = -1$ 。由于磁性薄膜足够薄，在整个推导中我们都假设其为均匀进动。薄膜两个表面上的相反磁荷会在外部产生相反的磁场，导致铁磁层外部的磁场 $\mathbf{H}_d = 0$ 这也可以通过公式 (3.5) 计算得出；在铁磁体内部， $\mathbf{H}_d = \{-M_x, 0, 0\}$ ， $\mathbf{B} = \{0, \mu_0 M_y, \mu_0(H_0 + M_0)\}$ ，其中只有 \mathbf{B} 的 y -分量以 ω 频率振荡，能够辐射电场。

3.2.1 完整解

这里我们超越准静态近似，求解辐射电场。根据公式 (3.2)，振荡的电磁场是在空间中辐射微波的源。对公式 (3.2) 中的第一个方程取旋度，频率为 ω 的电场满足：

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}. \quad (3.9)$$

这种辐射过程由振荡的“磁化电流” $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ 控制，它类似于由普通振荡电荷电流引起的辐射^[30]。

通过格林函数方法^[30]，公式 (3.9) 的解为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} \int \frac{[\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (3.10)$$

其中 $k = \omega/c$ 是微波的波数。由于只有 \mathbf{M} 的 x 和 y 分量以频率 ω 振荡，且在铁磁层内部是均匀的，所以在全空间中， $(\nabla \times \mathbf{M})_{x,y} = 0$ ，这导致 $E_x = E_y = 0$ ，并且：

$$E_z(x) = \frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} \int \frac{[\partial_{x'} M_y(\mathbf{r}')] e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (3.11)$$

利用 Weyl 公式^[7]

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int dk'_z dk'_y \frac{ie^{ik'_z(z-z')+ik'_y(y-y')} e^{i\sqrt{k^2-k_z'^2-k_y'^2}|x-x'|}}{2\pi\sqrt{k^2-k_z'^2-k_y'^2}}, \quad (3.12)$$

我们得到电场

$$E_z = \frac{\mu_0\omega M_y}{2k} \begin{cases} e^{-ik(x-d_F)} - e^{ik(x+d_F)}, & -d_F < x < d_F \\ e^{ik(x-d_F)} - e^{ik(x+d_F)}, & x > d_F \\ e^{-ik(x-d_F)} - e^{-ik(x+d_F)}, & x < -d_F \end{cases}. \quad (3.13)$$

根据公式(3.2)，我们发现磁感应强度 $B_x = 0$ ， $B_z = \mu_0(H_0 + M_0)$ 是静态的， $B_y = -\partial_x E_z/(i\omega)$ ，其表达式为：

$$B_y = \frac{\mu_0 M_y}{2} \begin{cases} e^{ik(x+d_F)} + e^{-ik(x-d_F)}, & -d_F < x < d_F \\ e^{ik(x+d_F)} - e^{-ik(x-d_F)}, & x > d_F \\ -e^{-ik(x+d_F)} + e^{-ik(x-d_F)}, & x < -d_F \end{cases}. \quad (3.14)$$

我们可以通过振荡的“磁化电流” \mathbf{J}_M 很好地理解辐射电场 (3.13)。对于均匀磁化进动， \mathbf{J}_M 位于铁磁绝缘体的表面，即其动态分量为：

$$\mathbf{J}_M(x) = [\delta(x+d_F) - \delta(x-d_F)]M_y\hat{\mathbf{z}} \propto M_y \quad (3.15)$$

在两个表面 $x = \pm d_F$ 处具有相同的大小但相反的符号，如图3.3所示。这种振荡的磁化电流会朝着两个相反方向辐射电磁波，其波矢分别为 $k\hat{\mathbf{x}}$ 和 $-k\hat{\mathbf{x}}$ （其中 $k = \omega/c$ ）的电磁波。由于 \mathbf{J}_M 在 $x = \pm d_F$ 处的符号相反，铁磁体左右表面所辐射电场的振幅符号亦相反，即 $E_L = -E_R \equiv E_0 \propto M_y$ 。在样品右侧，即 $x > d_F$ 的区域，左右表面辐射电场的传播相位分别为 $k(x+d_F)$ 和 $k(x-d_F)$ 由此产生的净电场为 $E = E_0(e^{ik(x+d_F)} - e^{ik(x-d_F)})$ 。与之类似，当 $x < -d_F$ 时，净电场 $E = E_0(e^{-ik(x-d_F)} - e^{-ik(x+d_F)})$ 。这些结果与公式(3.13) 完全一致。

有了公式(3.13)和(3.14)的完整解，我们就可以计算由于磁性绝缘体向外辐射能量而导致的铁磁共振的辐射阻尼。根据公式(3.14)，磁性绝缘薄膜内部的辐射磁场为：

$$H_x^r = -M_x,$$

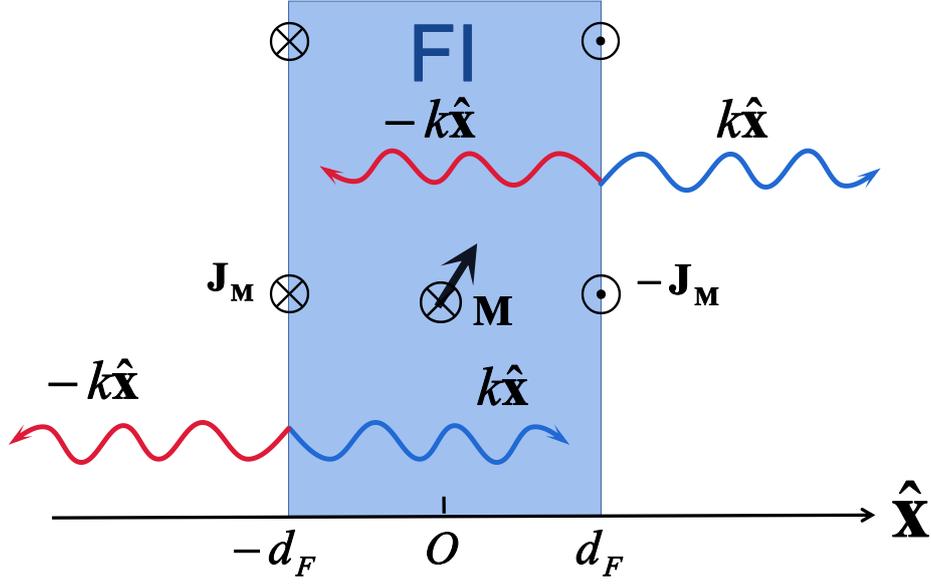


图 3.3 从磁性绝缘体两个表面的表面磁化电流辐射出的电场。

$$H_y^r = i \frac{\omega d_F M_y}{c} = -\frac{d_F}{c} \frac{dM_y}{dt} \quad (3.16)$$

该辐射磁场驱动磁化，因此线性化的朗道 - 里夫希茨 - 吉尔伯特（LLG）方程写为：

$$\begin{aligned} -i\omega M_x + \mu_0 \gamma M_y H_0 &= i(\alpha_G + \alpha_R) \omega M_y, \\ i\omega M_y + \mu_0 \gamma H_0 M_x &= -\mu_0 \gamma M_0 M_x + i\alpha_G \omega M_x, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中，辐射贡献的阻尼系数为：

$$\alpha_R = \mu_0 \gamma M_0 d_F / c. \quad (3.18)$$

它非常小，可以忽略不计：例如，对于厚度 $2d_F = 120 \text{ nm}$ ， $\mu_0 M_0 = 0.2 \text{ T}$ ^[119,120] 的钇铁石榴石（YIG）薄膜， $\alpha_R \approx 7.3 \times 10^{-6} \ll \alpha_G \sim 5 \times 10^{-4}$ 。然而，辐射阻尼随着薄膜厚度的增大而增大。

我们关注距离铁磁体表面约 $\sim \lambda$ 范围内的场。在铁磁绝缘体中 $\omega \sim 2\pi \times 4 \text{ GHz}$ ^[117]，而对于常规超导体， $\lambda \sim 100 \text{ nm}$ ，因此 $k\lambda \sim 10^{-5} \ll 1$ 。当 $kx \rightarrow 0$ 时，

我们有：

$$E_z(x) = \begin{cases} -i\mu_0\omega M_y x, & -d_F < x < d_F \\ -i\mu_0\omega M_y d_F, & x > d_F \\ i\mu_0\omega M_y d_F, & x < -d_F \end{cases}, \quad (3.19)$$

其示意图如图3.1(a)所示。磁感应强度

$$B_y(x) = \begin{cases} \mu_0 M_y, & -d_F < x < d_F \\ 0, & x > d_F \\ 0, & x < -d_F \end{cases} \quad (3.20)$$

这与准静态近似^[121]的结果一致，并且在铁磁体外部， H_y 为零。

3.2.2 准静态近似

上述分析表明，在关注近场极限时，我们可以采用准静态近似，即在公式(3.2)中令 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ 。在关注铁磁共振的情况时，电场 \mathbf{E} 在 y - z 平面内具有平移不变性，也就是说， $\partial_z E_x = 0$ 。取公式(3.1)的 y 分量， B_y 的振荡仅产生与磁化方向平行的 E_z ：

$$-\partial_x E_z = i\omega\mu_0 M_y. \quad (3.21)$$

对铁磁体沿 x 方向积分可得：

$$E_z(x) = -i\omega\mu_0 M_y (x + d_F) + E_z(x = -d_F). \quad (3.22)$$

因此，在铁磁体内， E_z 与 x 呈线性关系。在铁磁体外，

$$E_z(x) = -2i\omega\mu_0 M_y d_F + E_z(x = -d_F), \quad (3.23)$$

该电场是均匀的，这与准静态近似中外部磁场 $H_{y|outside} = 0$ 相符。根据对称性， $E_z(x = 0) = 0$ ，所以该电场与公式 (3.19) 完全相同。

3.3 超导-铁磁异质结构

接下来我们考虑由厚度为 $2d_F$ 的铁磁薄膜和厚度为 d_S 的超导体组成的超导 - 铁磁绝缘体异质结构，如图3.4所示。我们证明了相邻的超导体对辐射电场有很强的调

制作用，这就解释了在这种结构中为什么铁磁共振（FMR）频率没有发生偏移^[68,105]。

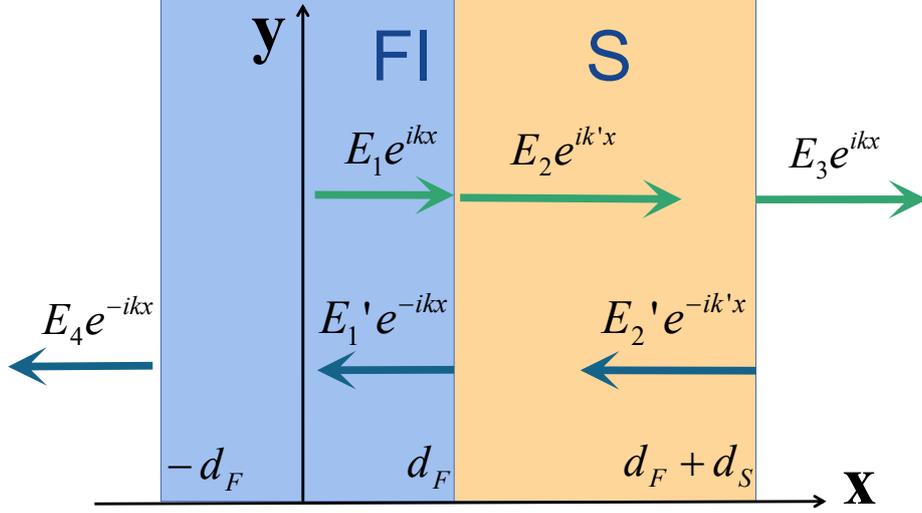


图 3.4 铁磁绝缘体 - 超导异质结构的辐射电场。

3.3.1 完全解

在铁磁体内部，由于均匀磁化强度 \mathbf{M} 满足 $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ ，方程 (3.9) 的解为 $E_z(x) = E_1 e^{ikx} + E_1' e^{-ikx}$ 。在超导体内部，根据方程 (3.1) 和 (3.3)，电场满足：

$$\partial_x^2 E_z + (\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 - 1/\lambda^2) E_z = 0, \quad (3.24)$$

该方程的解为 $E_z(x) = E_2 e^{ik'x} + E_2' e^{-ik'x}$ 。其中， $k' = \sqrt{(\omega/c)^2 - 1/\lambda^2} \approx i/\lambda$ ，在微波频率下是纯虚数。例如，当频率 $\omega \sim 2\pi \times 4 \text{ GHz}$ 时， $k = \omega/c \sim 83.8 \text{ m}^{-1}$ ，远小于伦敦穿透深度 $\lambda \sim 100 \text{ nm}$ 对应的 $1/\lambda \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ 。因此，由于迈斯纳效应，低频电磁波在超导体中不再传播，而是衰减。在异质结构外部，电场 $E_3 e^{ikx}$ 和 $E_4 e^{-ikx}$ 是辐射的。这些辐射电场如图3.4所示。

振幅 $\{E_1, E_1', E_2, E_2', E_3, E_4\}$ 由边界条件决定，即 E_z 和 H_y 在界面处是连续的。在界面处， E_z 的连续性要求

$$\begin{aligned} E_1 e^{ikd_F} + E_1' e^{-ikd_F} &= E_2 e^{ik'd_F} + E_2' e^{-ik'd_F}, \\ E_2 e^{ik'(d_F+d_S)} + E_2' e^{-ik'(d_F+d_S)} &= E_3 e^{ik(d_F+d_S)}, \\ E_1 e^{-ikd_F} + E_1' e^{ikd_F} &= E_4 e^{ikd_F}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

在超导体中, $H_y = -1/(i\omega\mu_0)\partial_x E_z$; 而在铁磁体中, $H_y = -1/(i\omega\mu_0)\partial_x E_z - M_y$ 。因此, 界面处 H_y 的连续性可得出:

$$\begin{aligned} k'(E_2 e^{ik'd_F} - E_2' e^{-ik'd_F}) &= k(E_1 e^{ikd_F} - E_1' e^{-ikd_F}) \\ &+ \omega\mu_0 M_y, \\ k'(E_2 e^{ik'(d_F+d_S)} - E_2' e^{-ik'(d_F+d_S)}) &= kE_3 e^{ik(d_F+d_S)}, \\ k(E_1 e^{-ikd_F} - E_1' e^{ikd_F}) + \omega\mu_0 M_y &= -kE_4 e^{ikd_F}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

结合公式(3.25)和(3.26), 我们可以得到所有的振幅。在铁磁绝缘体中,

$$E_z(-d_F < x < d_F) = RE_0 e^{-ik(x-d_F)} + E_{\text{single}}(x), \quad (3.27)$$

其中振幅 $E_0 = -[\omega\mu_0 M_y/(2k)](e^{2ikd_F} - 1)$, $E_{\text{single}}(x)$ 是单个磁性绝缘体的辐射电场 (公式(3.13)), 并且

$$R = \frac{e^{ik'd_S}(k^2 - k'^2) + e^{-ik'd_S}(k'^2 - k^2)}{e^{ik'd_S}(k - k')^2 - e^{-ik'd_S}(k + k')^2} \quad (3.28)$$

是超导体表面电场的反射系数。

我们在图3.5中绘制了在频率 $\omega \sim 2\pi \times 4 \text{ GHz}$ 下, 当伦敦穿透深度 λ 不同时, 反射系数 R 随超导体厚度 d_S 的变化关系。当 $d_S > 0.1 \text{ nm}$ 时, 反射系数饱和至-1; 但当 $d_S \rightarrow 0$ 时, 反射系数降至 0, 恢复到单层情况的解 (3.13)。我们得出结论, 即使 $d_S \ll \lambda$, 由于在 $\omega \sim 2\pi \times 4 \text{ GHz}$ 时, $|k| = \omega/c$ 远小于 $|k'| \approx 1/\lambda$, 所以 $R \rightarrow -1$ 。这意味着即使是超薄的常规超导层, 在铁磁绝缘体 - 超导体 (FI - S) 界面处电场也会发生全反射。如下所示, 这表明在所有使用厚超导体的现有实验中, 铁磁共振 (FMR) 频率都不会发生偏移^[68,105]。

在超导体内,

$$\begin{aligned} E_z(d_F < x < d_F + d_S) &= \frac{2kE_0}{e^{ik'd_S}(k - k')^2 - e^{-ik'd_S}(k + k')^2} \\ &\times \left((k - k')e^{-ik'(x-d_F+d_S)} - (k + k')e^{ik'(x-d_F-d_S)} \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

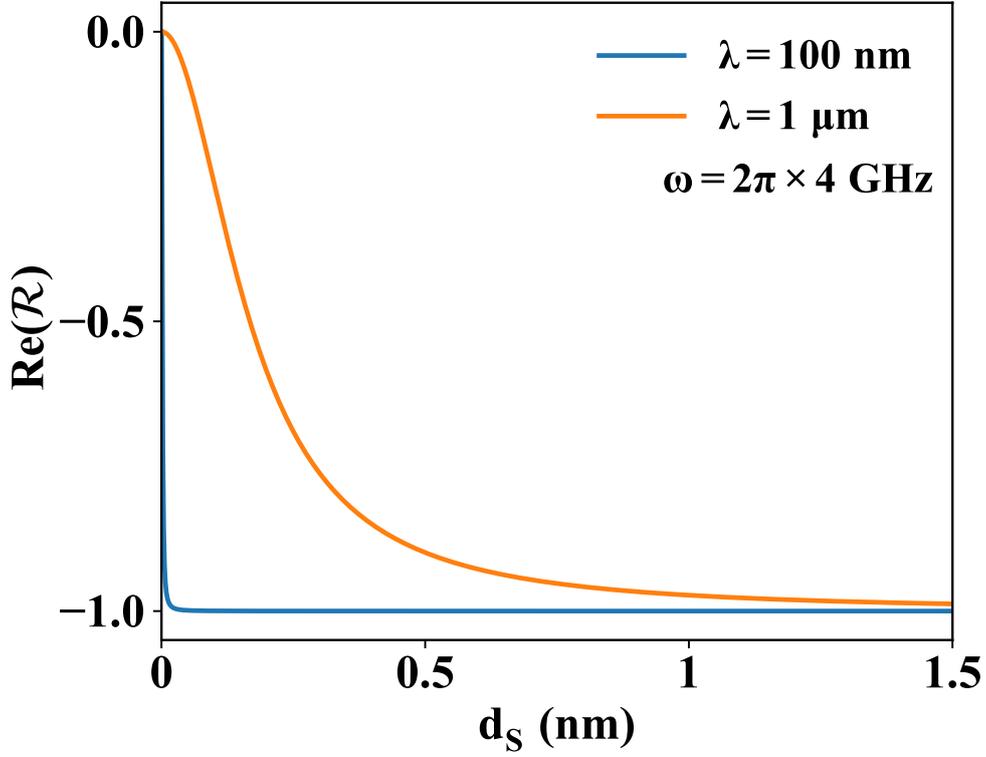


图 3.5 反射系数 $\text{Re}(R)$ 随超导体厚度 d_S 的变化关系，其中伦敦穿透深度分别为 $\lambda = 100 \text{ nm}$ 和 $1 \mu\text{m}$ 。频率取 $\omega = 2\pi \times 4 \text{ GHz}$ 。

由于 $|k| \ll |k'|$ ，该电场实际上非常微弱。在异质结构之外，

$$E_z = \begin{cases} \frac{-4kk'E_0 e^{ik(x-d_F-d_S)}}{e^{ik'd_S}(k-k')^2 - e^{-ik'd_S}(k+k')^2}, & x > d_F + d_S \\ RE_0 e^{-ik(x-d_F)} + E_{\text{single}}(x), & x < -d_F \end{cases} \quad (3.30)$$

在低频且靠近异质结构处， $kx \rightarrow 0$ ， $kd_F \rightarrow 0$ ，并且 $kd_S \rightarrow 0$ ，所以电场

$$E_z(x) = \begin{cases} 0, & x > d_F \\ -i\omega\mu_0 M_y (x - d_F), & -d_F < x < d_F, \\ 2i\omega\mu_0 M_y d_F, & x < -d_F \end{cases} \quad (3.31)$$

其示意图如图3.1 (b) 所示。由于全反射且相位移动 π ($R = -1$)，超导体内的电场消失，没有超导电流，因此对铁磁共振 (FMR) 没有调制作用。

3.3.2 准静态近似

完整的解清楚地表明，在超导-铁磁绝缘体异质结构的超导体一侧不存在电场，这在准静态近似 $\nabla \times \mathbf{H} = 0(\mathbf{J}_s)$ 的框架内可以很好地理解。假设在铁磁-超导界面处 $E_z(x = d_F) = \tilde{E}_0$ ，根据公式(3.6)，相邻超导体内的电场

$$E_z(x) = \tilde{E}_0 \frac{\cosh((x - d_S - d_F)/\lambda)}{\cosh(d_S/\lambda)} \quad (3.32)$$

会驱动超导电流。对于厚度为 $O(\lambda)$ 的薄超导薄膜，我们可以对超导电流取平均值 $J_{s,z} = [J_{s,z}(x = d_F) + J_{s,z}(x = d_F + d_S)]/2$ ，并且由公式 (3.3) 的第一个方程可得

$$J_{s,z} = \frac{i}{\mu_0 \omega \lambda^2} \tilde{E}_0 \frac{1 + \cosh(d_S/\lambda)}{2 \cosh(d_S/\lambda)}. \quad (3.33)$$

超导电流会根据 $H_y = -\partial_x A_z / \mu_0$ 产生矢势 (3.7) 和奥斯特磁场。在低频情况下，令 Weyl 恒等式 (3.12) 中的 $k = 0$ ，即^[7]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dk'_x dk'_y \frac{e^{ik'_x(x-x') + ik'_y(y-y')} e^{-\sqrt{k_x'^2 + k_y'^2}|z-z'|}}{2\pi \sqrt{k_x'^2 + k_y'^2}}, \quad (3.34)$$

我们得到由超导电流产生的奥斯特磁场

$$H_{s,y}(x) = \begin{cases} d_S J_{s,z} / 2, & x > d_F + d_S \\ -d_S J_{s,z} / 2, & x < d_F \end{cases}. \quad (3.35)$$

然而，在准静态近似下，与 x 无关的恒定 $H_{s,y}$ 在异质结构之外应该为零，因为恒定磁场会使辐射电场发散，这就要求当 $d_S \neq 0$ 时外部电场 $E_z(x > d_F) = 0$ 。由于电场在界面处是连续的，所以， $E_z(x = d_F) = \tilde{E}_0 = 0$ 并且根据公式 (3.21) 可知 $E_z(x = -d_F) = 2id_F \omega \mu_0 M_y$ 。因此，这些简单的计算精准地抓住了完整解(3.31)中的关键物理本质。

3.4 超导-铁磁绝缘体-超导异质结构

进一步地，我们考虑如图3.2所示的超导-铁磁绝缘体-超导体异质结构，它由厚度为 $2d_F$ 的铁磁绝缘体以及分别具有厚度 d_S 和 d'_S 的两个相邻超导薄膜组成。与超导-铁磁绝缘体双层结构相比，超导-铁磁绝缘体-超导体异质结构中的电场分布由于受到超导体的来回反射而发生了很大变化，这将在本节中进行讨论。

3.4.1 完全解

与超导-铁磁绝缘体异质结构类似,在铁磁体内部, $E_z(x) = E_1 e^{ikx} + E_1' e^{-ikx}$;在超导体“1”中, $E_z(x) = E_2 e^{ik'x} + E_2' e^{-ik'x}$;在超导体“2”中, $E_z(x) = E_3 e^{ik'x} + E_3' e^{-ik'x}$ 。在异质结构之外,辐射出电场 $E_4 e^{ikx}$ 和 $E_5 e^{-ikx}$ 。这些电场如图 3.6所示。

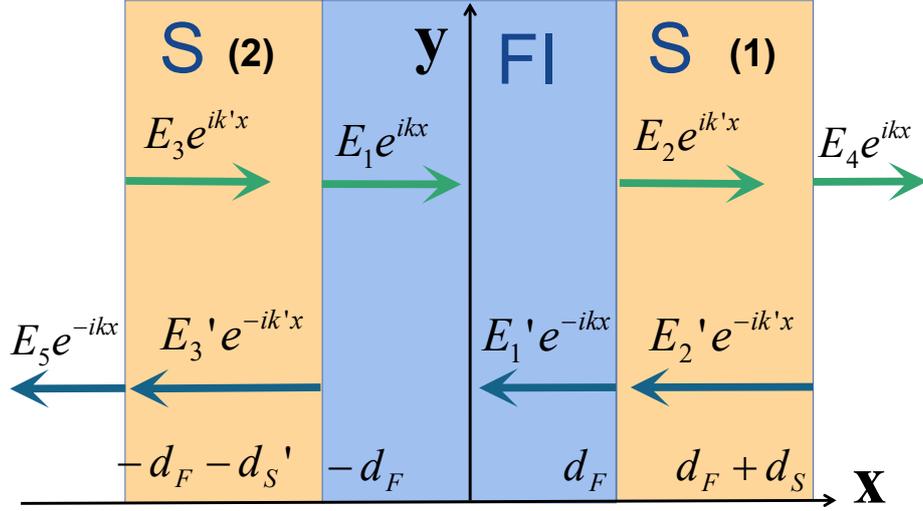


图 3.6 超导-铁磁绝缘体-超导体异质结构中的辐射电场。

振幅 $\{E_1, E_1', E_2, E_2', E_3, E_3', E_4, E_5\}$ 由边界条件决定。其中,界面处 E_z 的连续性要求:

$$\begin{aligned}
 E_1 e^{ikd_F} + E_1' e^{-ikd_F} &= E_2 e^{ik'd_F} + E_2' e^{-ik'd_F}, \\
 E_1 e^{-ikd_F} + E_1' e^{ikd_F} &= E_3 e^{-ik'd_F} + E_3' e^{ik'd_F}, \\
 E_2 e^{ik'(d_F+d_S)} + E_2' e^{-ik'(d_F+d_S)} &= E_4 e^{ik(d_F+d_S)}, \\
 E_3 e^{-ik'(d_F+d_S')} + E_3' e^{ik'(d_F+d_S')} &= E_5 e^{ik(d_F+d_S')},
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

同时,界面处 H_y 的连续性导致

$$\begin{aligned}
 k'(E_2 e^{ik'd_F} - E_2' e^{-ik'd_F}) &= k(E_1 e^{ikd_F} - E_1' e^{-ikd_F}) + \omega\mu_0 M_y, \\
 k'(E_3 e^{-ik'd_F} - E_3' e^{ik'd_F}) &= k(E_1 e^{-ikd_F} - E_1' e^{ikd_F}) + \omega\mu_0 M_y, \\
 k'(E_2 e^{ik'(d_F+d_S)} - E_2' e^{-ik'(d_F+d_S)}) &= kE_4 e^{ik(d_F+d_S)}, \\
 k'(E_3 e^{-ik'(d_F+d_S')} - E_3' e^{ik'(d_F+d_S')}) &= -kE_5 e^{ik(d_F+d_S')}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

结合方程 (3.36) 和 (3.37)，我们可以得到电场分布。特别地，当 $d_S = d'_S$ 时，在铁磁薄膜中，

$$E_z(|x| < d_F) = \frac{-\omega\mu_0 M_y \sinh(ikx)}{k \cosh(ikd_F) - k' f(u) \sinh(ikd_F)}, \quad (3.38)$$

其中 $u = -[(k + k')/(k - k')] \exp(-2ik'd_S)$,

$$f(u) = \frac{u - 1}{u + 1} = \frac{k' \sinh(ik'd_S) - k \cosh(ik'd_S)}{k \sinh(ik'd_S) - k' \cosh(ik'd_S)}. \quad (3.39)$$

在超导体“1”中，

$$\begin{aligned} E_z(d_F < x < d_F + d_S) \\ = \frac{-\omega\mu_0 M_y (ue^{ik'(x-d_F)} + e^{-ik'(x-d_F)})}{k(1+u) \coth(ikd_F) - k'(u-1)}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

而在超导体“2”中，

$$\begin{aligned} E_z(-d_F - d_S < x < -d_F) \\ = \frac{\omega\mu_0 M_y (ue^{-ik'(x+d_F)} + e^{ik'(x+d_F)})}{k(1+u) \coth(ikd_F) - k'(u-1)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

这两个电场都存在，并且电场 $E_z(x = -d_F)$ 和 $E_z(x = d_F)$ 符号相反。这一特性可以从磁偶极辐射来理解：由于磁化电流 \mathbf{J}_M （式 (3.15)）在磁性薄膜的两个表面 $x = \pm d_F$ 处方向相反，从而从这两个表面 $x = \pm d_F$ 辐射出的电场振幅符号相反，这些电场传播到超导体中，并在其中驱动方向相反的超导电流。在异质结构之外，

$$\begin{aligned} E_z(x > d_F + d_S) \\ = \frac{-\omega\mu_0 M_y (ue^{ik'd_S} + e^{-ik'd_S})}{k(1+u) \coth(ikd_F) - k'(u-1)} e^{ikx}, \\ E_z(x < -d_F - d_S) \\ = \frac{\omega\mu_0 M_y (ue^{ik'd_S} + e^{-ik'd_S})}{k(1+u) \coth(ikd_F) - k'(u-1)} e^{-ikx}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

当远离异质结构时，其简化为更简单的形式

$$\begin{aligned} E_z(x) \approx \frac{i\omega\mu_0 d_F \lambda M_y}{\lambda \cosh(d_S/\lambda) + d_F \sinh(d_S/\lambda)} \\ \times \begin{cases} -e^{ikx}, & x \gg d_F + d_S \\ e^{-ikx}, & x \ll -(d_F + d_S) \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

当 $d_S \gg \lambda$ 时，异质结构向外的辐射将被完全抑制。

另一方面，当图3.6中 $d_S \neq d'_S$ 时，超导体 | 铁磁绝缘体 | 超导体 (S|FI|S) 异质结构中 $E_z(x)$ 的通解变得较为复杂。在铁磁绝缘体内部，

$$E_z(-d_F < x < d_F) = \frac{-\omega\mu_0 M_y (Ge^{ikx} + e^{-ikx})}{k(Ge^{ikd_F} - e^{-ikd_F}) - k'f(u)(Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})}, \quad (3.44)$$

其中，

$$G = -\frac{-2k \sinh(ikd_F) + k'(f(u)e^{-ikd_F} + f(u')e^{ikd_F})}{-2k \sinh(ikd_F) + k'(f(u)e^{ikd_F} + f(u')e^{-ikd_F})}, \quad (3.45)$$

并且 $u' = -[(k + k')/(k - k')] \exp(-2ik'd'_S)$ 。在超导体“1”中，

$$E_z(d_F < x < d_F + d_S) = \frac{ue^{ik'(x-d_F)} + e^{-ik'(x-d_F)}}{1 + u} \times \frac{-\omega\mu_0 M_y (Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})}{k(Ge^{ikd_F} - e^{-ikd_F}) - k'f(u)(Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})}. \quad (3.46)$$

在超导体“2”中，

$$E_z(-d_F - d'_S < x < -d_F) = \frac{e^{ik'(x+d_F)} + u'e^{-ik'(x+d_F)}}{1 + u'} \times \frac{-\omega\mu_0 M_y (Ge^{-ikd_F} + e^{ikd_F})}{k(Ge^{ikd_F} - e^{-ikd_F}) - k'f(u)(Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})}. \quad (3.47)$$

在异质结外部，

$$E_z(x > d_F + d_S) = \frac{ue^{ik'd_S} + e^{-ik'd_S}}{1 + u} \times \frac{-\omega\mu_0 M_y (Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})e^{ik(x-d_F-d_S)}}{k(Ge^{ikd_F} - e^{-ikd_F}) - k'f(u)(Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})},$$

$$E_z(x < -d_F - d'_S) = \frac{e^{-ik'd'_S} + u'e^{ik'd'_S}}{1 + u'} \times \frac{-\omega\mu_0 M_y (Ge^{-ikd_F} + e^{ikd_F})e^{-ik(x+d_F+d_S)}}{k(Ge^{ikd_F} - e^{-ikd_F}) - k'f(u)(Ge^{ikd_F} + e^{-ikd_F})}. \quad (3.48)$$

磁场满足 $B_y = -\partial_x E_z / (i\omega)$ ，因此在磁性绝缘体内部，磁场为

$$H_y^{\text{ans}} = -\frac{(2M_y d_F / \lambda) f(u) f(u')}{(f(u) + f(u')) + 2(d_F / \lambda) f(u) f(u')}. \quad (3.49)$$

保留 k 的最低阶项，其实部为

$$\begin{aligned} \Re(H_y^{\text{ans}}) \approx & -2d_F M_y \tanh(d_S/\lambda) \tanh(d'_S/\lambda) [\lambda(\tanh(d_S/\lambda) + \tanh(d'_S/\lambda)) \\ & + 2d_F \tanh(d_S/\lambda) \tanh(d'_S/\lambda)]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

以及它的虚部

$$\begin{aligned} \Im(H_y^{\text{ans}}) = & 2kd_F M_y \left(\frac{\tanh^2(d'_S/\lambda)}{\cosh^2(d_S/\lambda)} + \frac{\tanh^2(d_S/\lambda)}{\cosh^2(d'_S/\lambda)} \right) \\ & \times [\tanh(d_S/\lambda) + \tanh(d'_S/\lambda) \\ & + 2d_F/\lambda \tanh(d_S/\lambda) \tanh(d'_S/\lambda)]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

在近场极限下，我们分别在图3.7中展示了对称结构 ($d'_S = d_S = 60 \text{ nm}$) 和非对称结构 ($d'_S = 2d_S = 120 \text{ nm}$) 的超导-铁磁绝缘体-超导体异质结构在 $T = 0.5T_c = 5.5$ 开尔文时电场 $\text{Re}(E_z/(i\omega\mu_0 M_y d_F))$ 的分布情况。对于氮化铌 (NbN) 而言，其临界温度 $T_c = 11$ 开尔文，伦敦穿透深度 $\lambda(T = 0) = 85 \text{ nm}$ ^[122]，且 $\lambda(T = 0.5T_c) = 87.8 \text{ nm}$ 。在对称异质结构中，两个超导体处的电场方向相反，但当 $d_S \neq d'_S$ 时，电场会发生偏移。这些携带能量的电场会在远场区向外辐射^[30]。当超导体足够厚，即 $\{d_S, d'_S\} \gg \lambda$ 时，这些电场会被限制在它们之间，这相当于一个尺寸小且性能优良的波导^[48]。

3.4.2 准静态近似

正如已证实的那样，在求解异质结构附近的电场时，准静态近似 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ 或者 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ 是可行的^[30]。在铁磁共振 (FMR) 情形下，辐射电场在 y - z 平面内是均匀的。因此，根据 $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}$ ， x 分量 $B_x = H_{d,x} + M_x = 0$ 在磁体外部不会产生电场。另一方面，在磁化动力学的线性响应区域内， $M_z = M_0$ ，因此 $B_z = \mu_0(H_0 + M_z)$ 是静态的。所以，根据 $-\partial_x E_z = i\omega\mu_0(M_y + H_{s,y})$ ，只有磁体中的 $B_y = \mu_0 M_y$ 会根据方程 $-\partial_x E_z = i\omega\mu_0(M_y + H_{s,y})$ 辐射出随时间变化的电场。沿 x 方向对铁磁体进行积分，可得到界面处的电场满足

$$E_z(x = d_F) - E_z(x = -d_F) = -2d_F i\omega\mu_0 (M_y + H_{s,y}). \quad (3.52)$$

在异质结构外部，由 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ 的 z 分量可知， $H_y|_{\text{外部}}$ 为常数。如在第 3.3.2 节中所证明的，该常数为零。

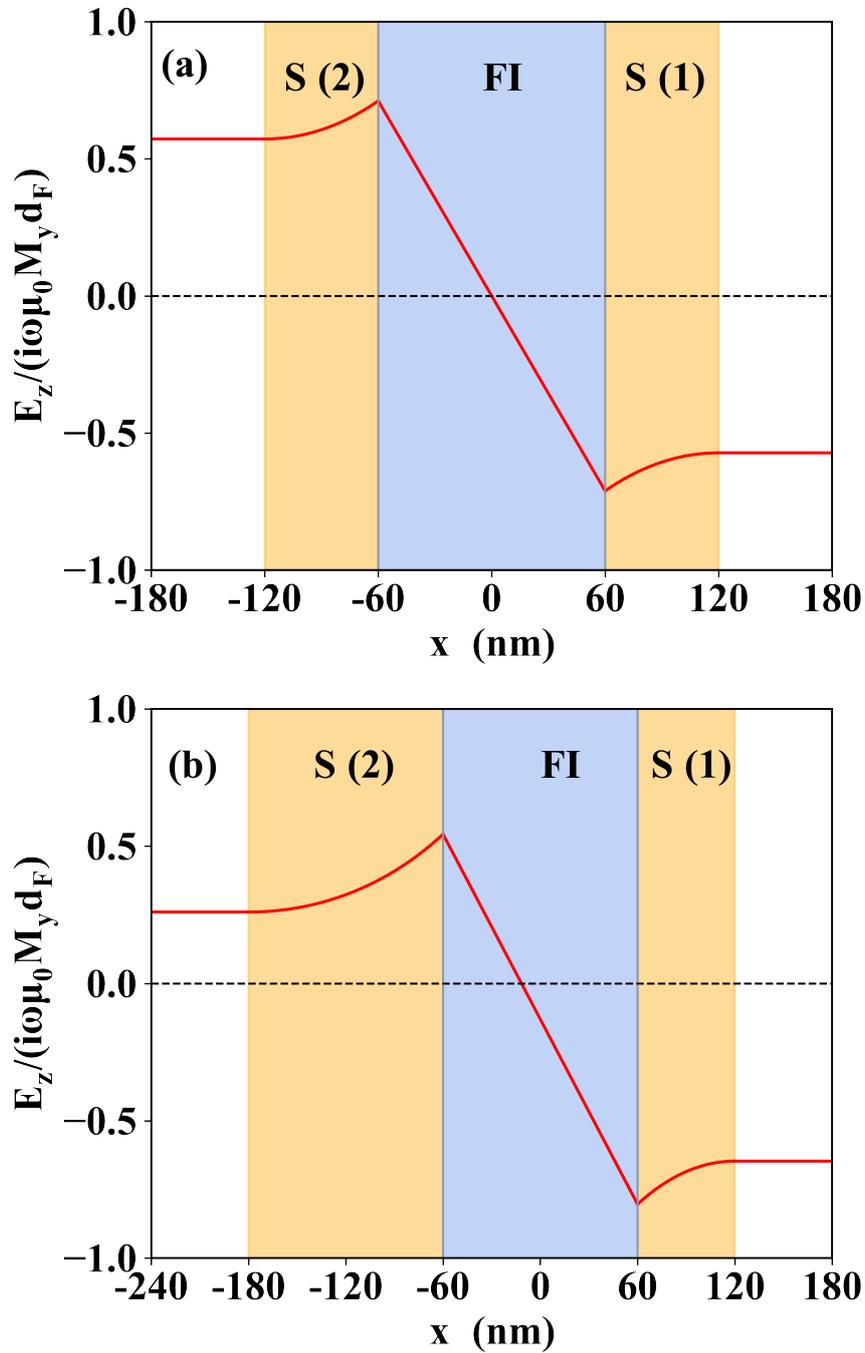


图 3.7 对称 ($d_S = d'_S = 60$ nm) (a) 和非对称 ($d'_S = 2d_S = 120$ nm) (b) 超导-铁磁绝缘体-超导体异质结构中的电场分布。铁磁薄膜厚度 $2d_F = 120$ nm, 伦敦穿透深度 $\lambda(T = 0.5T_c) = 87.8$ nm

华中科技大学硕士学位论文

在准静态近似下，超导体“1”和“2”中的电场满足方程(3.6)。根据界面处 E_z 和 H_y 连续的边界条件以及异质结构外部 $H_y|_{\text{外部}} = 0$ 的边界条件，超导体中的电场可表示为

$$\begin{aligned}
 & E_z(d_F < x < d_F + d_S) \\
 & = E_z(x = d_F) \frac{\cosh((x - d_S - d_F)/\lambda)}{\cosh(d_S/\lambda)}, \\
 & E_z(-d_F - d_S < x < -d_F) \\
 & = E_z(x = -d_F) \frac{\cosh((x + d'_S + d_F)/\lambda)}{\cosh(d'_S/\lambda)}, \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

这些电场驱动着与磁体相邻的超导体中的超导电流。对于厚度为 $O(\lambda)$ 量级的薄超导薄膜，我们可以对超导电流取平均值，即

$$\mathbf{J}_s^{(1)} = [\mathbf{J}_s(x = d_F) + \mathbf{J}_s(x = d_F + d_S)]/2,$$

以及

$$\mathbf{J}_s^{(2)} = [\mathbf{J}_s(x = -d_F) + \mathbf{J}_s(x = -d_F - d_S)]/2,$$

因此，

$$\begin{aligned}
 J_{s,z}^{(1)} & = \frac{i}{\omega\mu_0\lambda^2} E_z(x = d_F) \frac{1 + \cosh(d_S/\lambda)}{2 \cosh(d_S/\lambda)}, \\
 J_{s,z}^{(2)} & = \frac{i}{\omega\mu_0\lambda^2} E_z(x = -d_F) \frac{1 + \cosh(d'_S/\lambda)}{2 \cosh(d'_S/\lambda)}. \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

超导电流会产生矢势(3.7)，并根据 $H_{s,y} = -\partial_x A_z / \mu_0$ 产生奥斯特磁场。利用 Weyl 恒等式(3.34)，我们可以得到

$$H_{s,y}(x) = \begin{cases} (d_S J_{s,z}^{(1)} + d'_S J_{s,z}^{(2)})/2, & x > d_F + d_S \\ (-d_S J_{s,z}^{(1)} + d'_S J_{s,z}^{(2)})/2, & -d_F < x < d_F \\ (-d_S J_{s,z}^{(1)} - d'_S J_{s,z}^{(2)})/2, & x < -d_F - d'_S \end{cases} \tag{3.55}$$

$H_{s,y}|_{\text{外部}} = 0$ 要求

$$d_S J_{s,z}^{(1)} + d'_S J_{s,z}^{(2)} = 0, \tag{3.56}$$

因此，铁磁板内部的奥斯特磁场可简化为

$$H_{s,y}(-d_F < x < d_F) = d'_S J_{s,z}^{(2)} = -d_S J_{s,z}^{(1)}. \quad (3.57)$$

因此，当 $d_S = d'_S$ 时，两个超导体中的超导电流方向相反。当 d'_S 趋近于 0 时，磁体中的奥斯特磁场 $H_{s,y}$ 消失。

将方程 (3.54) 和 (3.52) 代入方程 (3.56)，我们可以得到铁磁薄膜表面的电场

$$\begin{aligned} E_z(x = -d_F) &= i\mu_0\omega d_S d_F (M_y + H_{s,y}) \frac{\cosh(d_S/\lambda) + 1}{\cosh(d_S/\lambda)} \\ &\times \left(\frac{d_S(\cosh(d_S/\lambda) + 1)}{2 \cosh(d_S/\lambda)} + \frac{d'_S(\cosh(d'_S/\lambda) + 1)}{2 \cosh(d'_S/\lambda)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

将其代入方程 (3.57)，可得到铁磁薄膜中的奥斯特磁场

$$H_{s,y}(-d_F < x < d_F) = -M_y \frac{d_F d'_S d_S G(d_S, d'_S, \lambda)}{\lambda^2 + d_F d'_S d_S G(d_S, d'_S, \lambda)}, \quad (3.59)$$

其中

$$\begin{aligned} G(d_S, d'_S, \lambda) &= \frac{(\cosh(d_S/\lambda) + 1)(\cosh(d'_S/\lambda) + 1)}{\cosh(d_S/\lambda) \cosh(d'_S/\lambda)} \\ &\times \left(\frac{d_S(\cosh(d_S/\lambda) + 1)}{\cosh(d_S/\lambda)} + \frac{d'_S(\cosh(d'_S/\lambda) + 1)}{\cosh(d'_S/\lambda)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

这些结果精准地体现了完整解的关键物理特性，并且便于计算基特尔磁振子与库珀对超导电流之间的相互作用。

3.4.3 基泰尔磁振子与库珀对超导电流之间的超强相互作用

上文我们阐述了磁化强度 \mathbf{M} 的动力学过程通过超导体的反作用产生了磁场 H_y^r ，而 H_y^r 反过来又驱动铁磁体中的 \mathbf{M} ，这就构成了一个自洽问题，需联立朗道-里夫希茨方程和麦克斯韦方程组来求解。换句话说，磁化强度的进动会辐射出电场，该电场通过微观上产生库珀对的质心动量，从而驱动超导体中的超导电流。这种库珀对的集体运动，即超导电流，反过来又会产生奥斯特磁场，该磁场会影响磁化强度的动力学过程，也就是使其铁磁共振频率发生偏移。

利用公式 (3.38) 以及 $B_y = -\partial_x E_z / (i\omega)$ ，我们得到对称超导-铁磁绝缘体-超导体异质结构中铁磁绝缘体内部的辐射磁场为：

$$H_y^r(|x| < d_F) = \frac{M_y k \cosh(ikx)}{k \cosh(ikd_F) - k' f(u) \sinh(ikd_F)} - M_y, \quad (3.61)$$

该磁场驱动磁化强度的进动。根据（线性化的）朗道 - 利夫希茨 - 吉尔伯特（LLG）方程（3.1），我们得出：

$$\begin{aligned} -i\omega M_x + \mu_0\gamma M_y H_0 &= \mu_0\gamma M_0 H_y^r + i\alpha_G \omega M_y, \\ \mu_0\gamma H_0 M_x + i\omega M_y &= -\mu_0\gamma M_0 M_x + i\alpha_G \omega M_x. \end{aligned} \quad (3.62)$$

我们看到，辐射磁场(3.61)的实部与 M_y 同相，这为磁化提供了一种类场转矩。保留 k 的一阶项，其均匀部分

$$\Re(H_y^r) = -\frac{d_F \tanh(d_S/\lambda)}{\lambda + d_F \tanh(d_S/\lambda)} M_y \quad (3.63)$$

将铁磁共振频率重整化为

$$\omega_K = \mu_0\gamma \sqrt{(H_0 + M_0) \left(H_0 + \frac{d_F \tanh(d_S/\lambda)}{\lambda + d_F \tanh(d_S/\lambda)} M_0 \right)}, \quad (3.64)$$

这与基泰尔频率 $\tilde{\omega}_K = \mu_0\gamma \sqrt{H_0(H_0 + M_0)}$ ^[123] 不同。当 $d_S \gg \lambda$ 时，解(3.64)恢复到文献^[66]中的结果，该文献预测，当磁性绝缘体被两块无限厚的超导体夹在中间时，磁振子与微波光子之间会存在超强耦合。

另一方面，辐射磁场的虚部与 M_y 不同相，因此它产生了一种类似阻尼的转矩。保留 k 的一阶项，

$$\Im(H_y) \approx \frac{M_y k d_F}{\cosh^2(d_S/\lambda)} \left(1 + \frac{d_F \tanh(d_S/\lambda)}{\lambda} \right)^{-2}$$

这导致了一个阻尼系数

$$\alpha_R = \frac{\mu_0\gamma M_0 d_F}{c \cosh^2(d_S/\lambda)} \left(1 + \frac{d_F \tanh(d_S/\lambda)}{\lambda} \right)^{-2}.$$

与单层磁性绝缘体(3.2.1)相比，当被两个超导体屏蔽时，磁化的辐射受到抑制，预计辐射阻尼会降低。当 $d_S = d_F = 60$ nm, $\lambda \sim 85$ nm, 且 $\omega \sim 2\pi \times 4$ GHz 时, $\alpha_R \approx 2.2 \times 10^{-6}$, 确实小于单层磁性绝缘体的阻尼系数 (7.3×10^{-6})。当 $d_S \gg \lambda$ 时, 由于没有场从超导-铁磁绝缘体-超导异质结构中辐射出去, $\alpha_R \rightarrow 0$ 。在非对称超导-铁磁绝缘体-超导异质结构中, 根据公式 (3.50)和公式 (3.51), 我们得到

$$\omega_K = \mu_0\gamma \sqrt{H_0 + M_0} \sqrt{H_0 - M_0 \Re(H_y)/M_y}, \quad (3.65)$$

并且额外的阻尼系数为

$$\alpha_R = \mu_0 \gamma M_0 \mathfrak{J}(H_y) / (\omega_K M_y). \quad (3.66)$$

另一方面，准静态近似的方法同样给出了调制的频率 ω_K ，通过联立方程（3.59）和 LLG 方程(3.62)，可以自洽地求解出铁磁共振（FMR）频率

$$\omega_K = \mu_0 \gamma \times \sqrt{\frac{\lambda^2 H_0 (H_0 + M_0) + d_S d'_S d_F G(d_S, d'_S, \lambda) (H_0 + M_0)^2}{d_S d'_S d_F G(d_S, d'_S, \lambda) + \lambda^2}}. \quad (3.67)$$

特别是，当 $d_S = d'_S$ ，时

$$\omega_K = \mu_0 \gamma \left(\frac{2\lambda^2 \cosh(d_S/\lambda) H_0 (H_0 + M_0)}{d_S d_F (\cosh(d_S/\lambda) + 1) + 2\lambda^2 \cosh(d_S/\lambda)} + \frac{d_S d_F (\cosh(d_S/\lambda) + 1) (H_0 + M_0)^2}{d_S d_F (\cosh(d_S/\lambda) + 1) + 2\lambda^2 \cosh(d_S/\lambda)} \right)^{1/2}. \quad (3.68)$$

为了展示铁磁共振（FMR）的频移，我们假设沿 $\hat{\mathbf{y}}$ 方向施加一个频率为 ω_0 的振荡磁场 $\tilde{H} e^{-i\omega_0 t} \hat{\mathbf{y}}$ （相关的微波电场沿法向 $\hat{\mathbf{x}}$ -方向）。该微波的波长比异质结构的厚度大得多，因此在异质结构厚度方向上可将其视为均匀的。当 $\{d_S, d'_S\} \sim \lambda$ 时，它能轻易穿透超导体。由于波矢（沿 $\hat{\mathbf{z}}$ 方向）与薄膜平行，它仅激发铁磁体中的磁化强度 \mathbf{M} ，而不会驱动超导体。

将外部泵浦场 $\tilde{H} e^{-i\omega_0 t} \hat{\mathbf{y}}$ 纳入朗道 - 利夫希茨 - 吉尔伯特（LLG）方程(3.62)，我们发现在 $\alpha_G \ll 1$ 的情况下：

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 (H_0 + M_0)}{\omega_K^2 - \omega_0^2 - i\Gamma} \tilde{H}, \\ M_x &= -iM_y \left[\frac{\omega_0}{\mu_0 \gamma (H_0 + M_0)} + \frac{i\alpha_G \omega_0^2}{(\mu_0 \gamma (H_0 + M_0))^2} \right], \end{aligned} \quad (3.69)$$

其中

$$\Gamma = \frac{\alpha_G \omega_0^3}{\mu_0 \gamma (H_0 + M_0)} + \mu_0 \gamma (H_0 + M_0) (\alpha_G + \alpha_R) \omega_0. \quad (3.70)$$

由式（3.40）可知，在薄超导体“1”中，平均电场 $E_z = [E_z(x = d_F) + E_z(x = d_F + d_S)]/2$ 为

$$E_z^{(1)} = -\frac{\tilde{H} \omega \mu_0 (u + 1 + u e^{ik'd_S} + e^{-ik'd_S})}{2 k(1 + u) \coth(ikd_F) - k'(u - 1)}$$

$$\times \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 (H_0 + M_0)}{\omega_K^2 - \omega_0^2 - i\Gamma}. \quad (3.71)$$

并且根据伦敦方程，超导体内部相应的平均超导电流为：

$$J_z^{(1)} = -\frac{i\tilde{H}}{2\lambda^2} \frac{u + 1 + ue^{ik'd_S} + e^{-ik'd_S}}{k(1+u)\coth(ikd_F) - k'(u-1)} \times \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 (H_0 + M_0)}{\omega_K^2 - \omega_0^2 - i\Gamma}. \quad (3.72)$$

我们展示了相关数值计算结果，所考虑的结构为：一层厚度 $2d_F = 120 \text{ nm}$ 的钇铁石榴石（YIG）薄膜，被两片厚度 $d_S = d'_S = 60 \text{ nm}$ 的氮化铌（NbN）超导体夹在中间。绝缘的硫化铕（EuS）磁性薄膜^[124]也可作为验证我们预测的一种备选材料。对于 YIG，其 $\mu_0 M_0 = 0.2$ 特斯拉， $\alpha_G = 5 \times 10^{-4}$ ^[120]。对于 NbN，我们采用其在时 $\lambda(T = 0.5T_c) = 87.8 \text{ nm}$ 的数据^[122]。我们设定偏置场 $\mu_0 H_0 = 0.05$ 特斯拉，激励场 $\mu_0 \tilde{H} = 0.01$ 毫特斯拉。图3.8展示了（其中一个）超导体中的辐射电场，以及磁化强度 \mathbf{M} 的激发振幅随激励频率 ω_0 的变化情况。频移为 $2\pi \times 1.6\text{GHz}$ ，约为裸铁磁共振频率 $\tilde{\omega}_K = 2\pi \times 3.2\text{GHz}$ 的一半。这表明，即便使用磁性绝缘体，也有可能实现磁振子与库珀对超导电流之间的超强相互作用。

在讨论频移的温度依赖性之前，我们先说明，即使在温度 $T \rightarrow T_c$ 时，正常电流主要为铁磁共振（FMR）提供额外的阻尼，且只会引起微小的频移。我们通过二流体模型，并结合低频下的电导率来估算正常电流的贡献^[118]：

$$\tilde{\sigma}(\omega) \approx \frac{\rho_n e^2 \tau}{m_e} + i \frac{\rho_s e^2}{m_e} \frac{1}{\omega} = \sigma_n + i \frac{1}{\omega \mu_0 \lambda^2}. \quad (3.73)$$

其中 τ 是电子的弛豫时间， ρ_n (ρ_s) 是正常流体（超流体）密度。当 $T > T_c$ 时， ρ_n 等于电子密度 n_e 。将电导率（3.73）代入麦克斯韦方程，对称超导-铁磁绝缘体-超导异质结构中由正常电流和超导电流共同贡献的辐射磁场（在 k 的一阶近似下）为：

$$\tilde{H}_y = M_y \frac{i\tilde{k}d_F(\tilde{k} \tanh(i\tilde{k}d_S) - k)}{\tanh(i\tilde{k}d_S)(k - i\tilde{k}^2 d_F) + \tilde{k}(ikd_F - 1)}, \quad (3.74)$$

其中 $\tilde{k}^2 = i\omega\mu_0\sigma_n - 1/\lambda^2$ ，由此我们得出铁磁共振频率和额外的阻尼系数：

$$\begin{aligned} \omega_K &= \mu_0 \gamma \sqrt{H_0 + M_0} \sqrt{H_0 - M_0 \Re(\tilde{H}_y) / M_y}, \\ \tilde{\alpha} &= \mu_0 \gamma M_0 \Im(\tilde{H}_y) / (\omega_K M_y). \end{aligned} \quad (3.75)$$

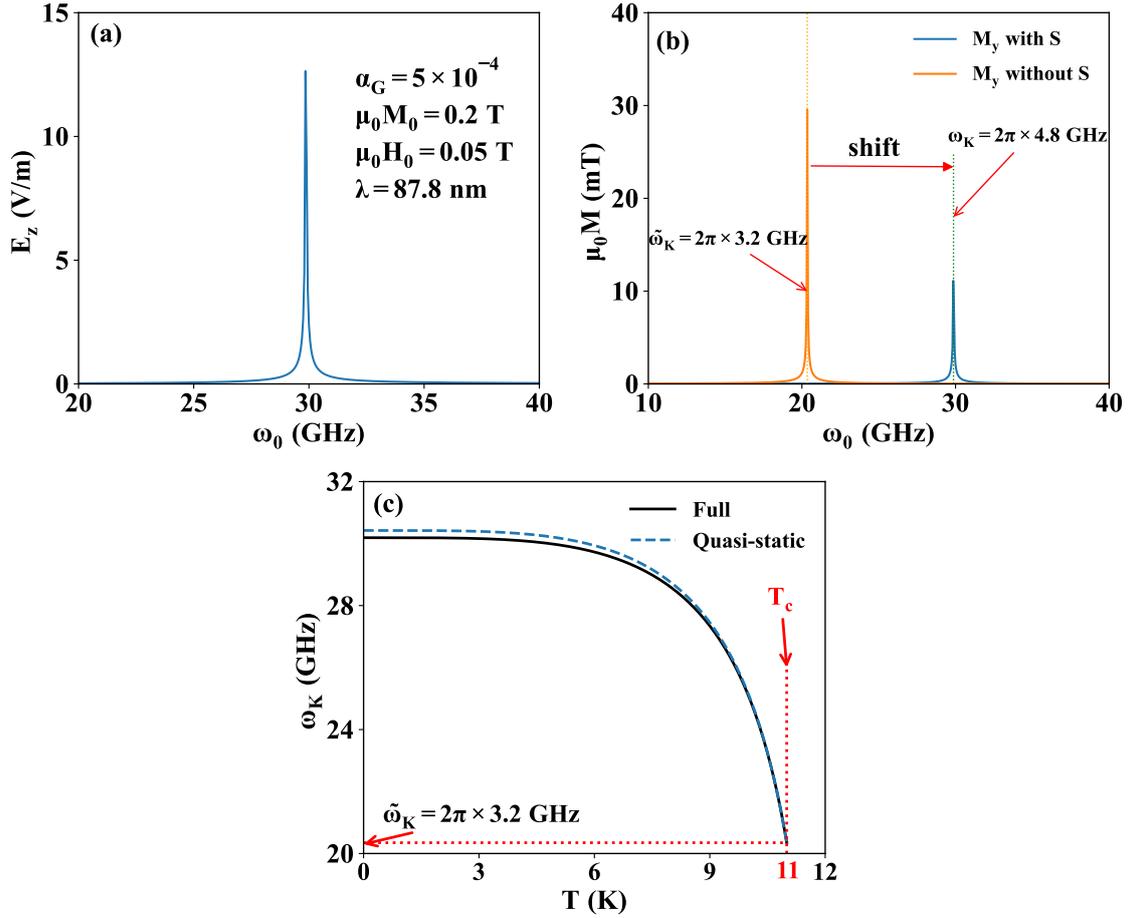


图 3.8 激励场 $\mu_0 \tilde{H} = 0.01 \text{ mT}$ 下的铁磁共振 (FMR) 光谱。在 (a) 和 (b) 中, 温度 $T = 0.5T_c = 5.5 \text{ K}$ 。(a) 绘制了对称超导-铁磁绝缘体-超导异质结构中 (其中一个) 超导体的激发电场振幅。共振电场振幅 $E_z \sim 14 \text{ V/m}$ 。(b) 展示了有和没有两个相邻超导体时磁化强度 M_y 的激发振幅。有超导体时 $M_x \approx 0.6M_y$, 无超导体时 $M_x \approx 0.5M_y$ 。频移高达 $2\pi \times 1.6 \text{ GHz}$, 约为 $\tilde{\omega}_K/2$ 。(c) 通过完整计算 (黑线) 和准静态近似 (虚线) 得到的铁磁共振频率 ω_K 的温度依赖性。纯铁磁共振频率 $\tilde{\omega}_K = 2\pi \times 3.2 \text{ GHz}$ 。

当 $T \rightarrow T_c$ 时, 对于氮化铌 (NbN), $\sigma_n \sim 1.1 \times 10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ^[125], $d_S = d_F = 60 \text{ nm}$, 且 $\omega \sim 2\pi \times 4\text{GHz}$, 我们发现频移 $\delta\omega = \omega_K - \tilde{\omega}_K \sim 10^{-5}\text{GHz}$, 小到可以忽略不计, 而对于钇铁石榴石 (YIG), 额外的阻尼 $\tilde{\alpha} \sim 2 \times 10^{-4}$ 相当大,。

由于在频移中可忽略正常电流的影响, 我们根据公式 (3.75) 计算了铁磁共振 (FMR) 频率的温度依赖性, 如图 8 (c) 所示, 其中使用的参数与图 8 (a) 和图 8 (b) 相同。当 $T \rightarrow 0$ 时, 共振频率达到最大值; 而当 $T \rightarrow T_c$ 时, 由于超导性消失, 共振频率恢复到 Kittel 频率。我们对比了完整解 (黑线) 和准静态解 (虚线), 发现在的所有温度范围内, 准静态近似都非常好。值得注意的是, 最近, 杨光老师课题组在实验上^[126] 使用我们的公式, 验证了他的测量, 证明了我们理论的正确性。

3.5 本章小结

磁性绝缘体是长程自旋输运、磁振子与微波强耦合以及量子信息处理的理想候选材料, 通过超导体对其进行调控可能带来新的控制维度。与金属磁体相比, 磁性绝缘体与超导体之间的邻近效应可能有所不同, 这在未来研究中或许有助于区分不同的竞争机制。我们的模型体系与金属铁磁体不同, 因为绝缘体中不存在电流 (若电流较大, 可能会通过辐射影响场分布)。

通过伦敦方程对超导体中响应的表述是唯象的, 不过, 它抓住了磁性绝缘体中的铁磁共振与超导体中超导电流之间相互作用的关键物理机制。然而, 在经典的伦敦模型中, 一些有趣的效应, 比如杂质的作用以及库珀对的有限关联长度, 可能并未得到精确考量。未来, 我们的工作可作为一个起点, 用以拓展至一个完全基于微观层面的模型, 例如基于乌萨德尔方程的模型。

综上所述, 我们分析了绝缘磁性薄膜中的 Kittel 磁振子与超导体中库珀对超导电流之间的相互作用, 这种相互作用是由磁化动力学所辐射的电场介导的。通过强调铁磁体 - 超导体界面处电场全反射的作用 (该作用在超越准静态近似的情况下求解), 我们全面解释了在铁磁绝缘体 - 超导体 (FI - S) 异质结构中铁磁共振 (FMR) 频移消失的原因, 并预测在具有迈斯纳屏蔽效应的超导体 - 铁磁绝缘体 - 超导体 (S - FI - S) 异质结构中会存在 FMR 频移。磁振子与库珀对超导电流之间的耦合极强, 频移可达裸铁磁共振频率的百分之几十, 这可能带来极大的优势。

4 表面铁振子及其激发

电偶极子与磁偶极子常被视作对偶存在，原因在于在众多情形下，与之相关的电场强度 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 所遵循的运动方程在形式上极为相似。举例来说，在准静态条件下，依据麦克斯韦方程组，磁偶极子和电偶极子产生的电场和磁场分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \\ \mathbf{H}^{(d)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}',\end{aligned}\quad (4.1)$$

他们有着相同的形式。这激发了近期对铁电学与磁振子学之间的比较研究^[127,128]。

在磁性材料中，集体磁激发被量子化为“磁振子”，这是一种携带自旋、能量、动量等的准粒子。与磁振子类似，携带电极化的激发被定义为“铁振子”^[127,129]，它同样是一种携带能量、动量等的准粒子。Bauer 等人预测了在块状铁电材料^[127-129]以及铁电纳米结构^[130-132]中，由铁振子实现的电极化和热量的基本输运性质。Heremans^[133]等人对块状锆钛酸铅基铁电体中与电场相关的热导率和热扩散率进行了测量。他们发现，这种相关性源于电场对声子色散的调制作用。这一研究成果为铁电材料中的声子携带具有铁振子特性的电极化提供了有力证据。

对于体模式的激发，Tang 等人的研究表明，在体铁磁材料中，铁振子能够与光光子相互耦合，从而产生了“铁振子 - 光子极化激元”^[134]。然而，在这一研究中，电偶极子之间的偶极相互作用被忽略了。Zhuang 和 Hu^[135]考虑偶极相互作用，模拟了由振荡电极化所辐射出的电场的影响。他们预测，杂散电场会降低本征极化振荡频率，并且会显著缩短铁电薄膜中的弛豫时间。

同样的，偶极相互作用还会导致其他的物理效应。在本章中，我们将展示铁电体中由长程偶极相互作用产生的表面铁电振子。它们在太赫兹频段会产生强手性杂散电场，如图 4.1 所示。我们发现表面铁电振子存在两个分支，一个分支由于关键的偶极相互作用被推至表面离子等离子体频率 $\sim \Omega_p/\sqrt{2}$ ，而另一个低频分支频率 $\sim \Omega_p/10$ 约为 10 THz。低频模式的极化是线性的，且位于垂直于波矢的表面平面内。与铁磁体中的 Damon-Eshbach 磁振子不同^[91]，表面铁电振子不具有手性。然而，它们的杂散电场是圆极化的，其进动轴垂直并锁定于动量方向。这种手性在传统的表

面极化子和瑞利表面声波中也有发现。我们预测表面铁电振子的色散关系具有高度各向异性，这使得聚焦激发能够产生定向发射，如图 4.1所示。

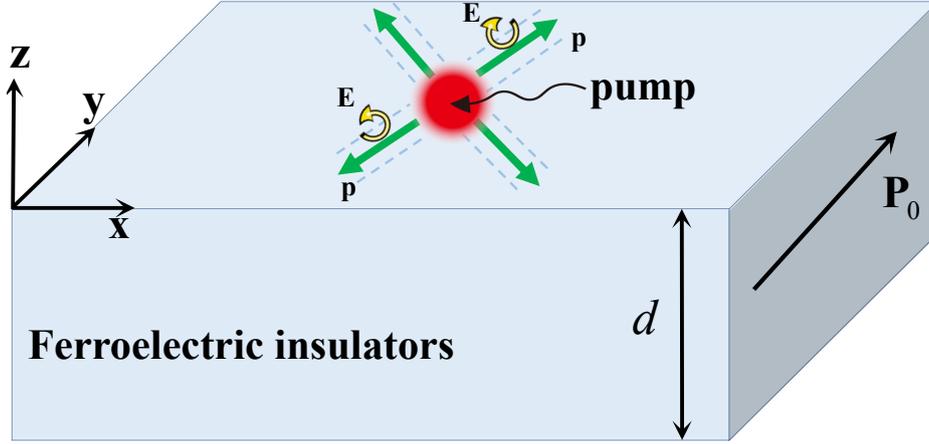


图 4.1 铁电绝缘体中激光光斑（红点）激发的表面铁电振子。铁电体厚度为 d ，极化强度 \mathbf{P}_0 沿 \hat{y} 方向。绿色箭头表示预测的具有四重对称性的定向相干铁电振子束发射，黄色箭头表示相关的具有动量锁定极化的杂散电场。

4.1 模型和基本理论

我们考虑一块单轴铁电绝缘体平板，其在 x - y 平面内延伸，垂直于 \hat{z} 轴（图 4.1）。平衡态下的自发极化强度 \mathbf{P}_0 沿 \hat{y} 方向，不产生退极化场。在铁电绝缘体中，电极化涨落 $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ 之间的库仑相互作用很强且作用距离长，这使得该问题较为复杂。假设涨落较小，即 $|\mathbf{p}| \ll |\mathbf{P}_0|$ ，我们可以通过自洽求解电极化的 Landau-Khalatnikov-Tani (LKT) 运动方程，并结合由 \mathbf{p} 产生的电场 $\mathbf{E}^{(d)}$ 的麦克斯韦方程，来寻找本征模式。

我们从单轴铁电绝缘体在居里温度 T_c 以下的自由能 $F = \int d\mathbf{r} \mathcal{F}(\mathbf{r})$ 出发，该绝缘体受到外部（直流或交流）电场 $\mathbf{E}^{(e)}$ 的作用，能量密度是电极化强度 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{p}$ 的函数：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{r}) = & (\alpha/2)P_y^2 + (\beta/4)P_y^4 + (\lambda/2)(P_x^2 + P_z^2) \\ & - (1/2)\mathbf{E}^{(d)} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{E}^{(e)} \cdot \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

在 $T \ll T_c$ 的情况下，我们的结果对朗道参数 $\alpha < 0$ 、 $\beta > 0$ 和 $\lambda > 0$ 的依赖并不显著。库仑相互作用的重要性在于其在朗道自由能中起主导作用。假设电极化强度围

绕平衡值 P_0 的涨落为 $\delta \mathbf{p} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ，则自由能密度的涨落可估计为：

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\mathbf{P}_0 + \delta \mathbf{p}) - \mathcal{F}(P_0) \\ &= \left((\alpha/2 + 2\beta P_0^2 + \lambda) + \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})^2}{k^2} \right) \delta p^2, \quad (2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $n = \{1, 1, 1\}$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ ，方程的第二项代表库仑相互作用的贡献。以铁电体 LiNbO_3 为例，库仑相互作用的贡献约为 $5.6 \times 10^{10} \text{Nm}^2/\text{C}^2$ ，大于其他项的贡献（约 $4.3 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ ）^[136]。

我们关注表面铁电振子及其与电介质中传统声子的差异。电极化是一个独立的热力学变量。需要注意的是，在位移型铁电体中，铁电振子的运动方程与晶格动力学密切相关。位于 \mathbf{r}_i 处，带有有效电荷 Q_i 的原子产生的电极化强度 $\sum_i Q_i \mathbf{r}_i$ ，其动力学由有效电场驱动的离子运动和弹性力共同支配。这里我们重点关注 LKT 运动方程：

$$m_p \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2 + \gamma \partial \mathbf{P} / \partial t = -\delta F / \delta \mathbf{P}, \quad (4.4)$$

该方程可看作是具有有效质量 $m_p = 1/(\varepsilon_0 \Omega_p^2)$ 的含有阻尼的牛顿方程，其中 ε_0 是真空介电常数， Ω_p 是离子等离子体频率， γ 是唯象粘性阻尼常数。 \mathbf{P} 是电场的源，电场满足波动方程： $\nabla^2 \mathbf{E}^{(d)} - (1/c^2) \partial_t^2 \mathbf{E}^{(d)} = \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P} - (1/\varepsilon_0) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P})$ ，该方程由位移电流密度 $\dot{\mathbf{P}}$ 产生的电磁辐射和束缚电荷积累 ($-\nabla \cdot \mathbf{P}$) 共同贡献，其中 μ_0 是真空磁导率。对于单色涨落 $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i\omega t}$ ，假设其波长 λ 远小于光的波长，即 $k \gg \omega/c$ 且 $\lambda \ll 2\pi c/\omega \equiv \lambda_c$ ，由于波矢失配，它们之间的耦合较弱。在我们感兴趣的频率范围 $\omega \sim 10 \text{ THz}$ 内， $\lambda_c \sim 190 \mu\text{m}$ 属于长波长。由于光速 c 有限导致的延迟效应可以忽略不计，因此我们可以在准静态近似下处理电偶极场^[30]：

$$\mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (4.5)$$

在平衡态下，当施加静态外场 $E_y^{(e)} \hat{\mathbf{y}}$ 时，恒定电极化强度 $\mathbf{P}_0 = \{0, P_0, 0\}$ 使自由能最小化，即 $\delta F / \delta \mathbf{P} = 0$ 。根据 $\alpha P_0 + \beta P_0^3 = E_y^{(e)}$ ，当 $E_y^{(e)} \rightarrow 0$ 时， $P_0^2 \rightarrow -\alpha/\beta$ 。在线性区域，当 $|\mathbf{p}| \ll |\mathbf{P}_0|$ 且假设外部电场较小，即 $\mathbf{E}^{(e)} \rightarrow 0$ 时，涨落的运动方程为：

$$\begin{aligned} (1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_{x,z} + K_{\perp} p_{x,z} &= \varepsilon_0 E_{x,z}^{(d)}, \\ (1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_y + K_{\parallel} p_y &= \varepsilon_0 E_y^{(d)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 $K_{\perp} = \varepsilon_0 \lambda > 0$ 和 $K_{\parallel} = \varepsilon_0(\alpha + 3\beta P_0^2) \rightarrow -2\varepsilon_0 \alpha > 0$ 是无量纲的“刚度”常数。本征模的两个分支分别描述纵向和横向涨落。在文献 [137] 中，作者仅讨论了纵向模式，忽略了偶极相互作用对纵向和横向模式的耦合。偶极相互作用使 $k = 0$ 的模式产生能隙，其频率达到离子等离子体频率 Ω_p （推导过程见下文及附录 3），这类似于磁各向异性导致的磁振子能隙。方程 (4.5) 和 (4.6) 描述了电极化及其偶极电场之间的相互作用。我们将解展开为平面波形式：

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{a}e^{ik_z z} + \mathbf{b}e^{-ik_z z}) e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)}, \quad (4.7)$$

其中面内坐标 $\boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ ，动量 $\boldsymbol{\kappa} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$ ，该式会产生偶极场：

$$\mathbf{E}^{(d)} = \frac{e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)}}{\varepsilon_0} \int_{-d}^0 dz' \mathcal{G}(z - z') \begin{pmatrix} a_x e^{ik_z z'} + b_x e^{-ik_z z'} \\ a_y e^{ik_z z'} + b_y e^{-ik_z z'} \\ a_z e^{ik_z z'} + b_z e^{-ik_z z'} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

其中 $\mathcal{G}(z - z')$ 是格林函数张量。这里 $k_y E_x^{(d)} = k_x E_y^{(d)}$ 意味着极化和波矢的锁定（详细内容见附录 3）。

4.2 表面铁振子

极化波与由表面和体束缚电荷产生的电场相互作用，需要自洽计算。将方程(4.8)代入方程 (4.6)，我们得到两个耦合的特征方程（推导细节见附录 3），可用于求解 ω 和 k_z 与 k_x 和 k_y 的关系。其中第一个特征方程：

$$c_1 c_2 k^2 + c_1 k_y^2 + c_2 (k_x^2 + k_z^2) = 0 \quad (4.9)$$

建立了频率和动量之间的关系，而 $c_1 \equiv -(\omega/\Omega_p)^2 + K_{\perp}$ 和 $c_2 \equiv -(\omega/\Omega_p)^2 + K_{\parallel}$ 是无量纲的。对于体激发， k_z 是实数，方程 (4.9) 会产生两个铁电振子分支，分别在 $\omega \sim \Omega_p$ 和 $\omega \ll \Omega_p$ 处存在带隙。高频分支是纵向的， $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}$ ，其频率为离子体频率 Ω_p 。低频分支则是纵向和横向模式的混合。复数解 $k_z = \eta_1 + i\eta_2$ 满足第二个特征方程

$$\begin{aligned} & [(c_1 + 1)k_z \sin(k_z d/2) - c_1 \kappa \cos(k_z d/2)] \\ & \times [(c_1 + 1)k_z \cos(k_z d/2) + c_1 \kappa \sin(k_z d/2)] = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

意味着存在铁电表面模式。当考虑厚平板 (d 较大) 时, $\coth(d\eta_2/2) \rightarrow 1$, $\tanh(d\eta_2/2) \rightarrow 1$, 所以根据方程(4.10), 我们得到 $\eta_1 = 0$ and $\eta_2 = -c_1\kappa/(1 + c_1)$ 。将 $k_z = \pm i\eta_2$ 代入方程 (4.9), 可将耦合的特征方程 (4.9) 和 (4.10) 简化为:

$$\begin{aligned} k_z &= \pm ic_1\kappa/(1 + c_1), \\ k_x^2 c_2(1 + 2c_1) + k_y^2 [c_1 c_2 + c_1(1 + c_1)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

在大多数铁电体中, 室温下弹性常数及其差值 $\delta = K_{\parallel} - K_{\perp}$ 远小于 1。在 δ 的一阶近似下求解方程 (4.11), 我们得到表面模式:

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa}^+ &= \Omega_p \sqrt{(1 + \delta \cos^2 \theta_{\kappa})/2 + K_{\perp}}, \\ \omega_{\kappa}^- &= \Omega_p \sqrt{\delta \sin^2 \theta_{\kappa} + K_{\perp}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

这些模式存在能隙, 且取决于传播方向与平衡极化方向之间的夹角 θ_{κ} 。图 4.2 展示了传统铁电绝缘体铌酸锂 (LiNbO_3) 的色散特性, 在室温下, 其参数 $\alpha = -2.012 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, $\beta = 3.608 \times 10^9 \text{ Nm}^6/\text{C}^4$, $\lambda = 1.345 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ ^[136], 由此得到 $P_0 = 0.746 \text{ C/m}^2$, $K_{\perp} = 0.012$, $K_{\parallel} = 0.036$ 。低频分支位于 $\kappa \parallel \mathbf{P}_0$ 时的 $\sqrt{K_{\perp}}\Omega_p$ 和 $\kappa \perp \mathbf{P}_0$ 时的 $\sqrt{K_{\parallel}}\Omega_p$ 之间。由于 $|\alpha| \propto |T - T_c|$, 降低温度会增强纵向刚度 K_{\parallel} , 从而提高低频表面铁电振子的峰值频率。高频分支位于 $\Omega_p \sqrt{(1 + 2K_{\perp})/2}$ 和 $\Omega_p \sqrt{(1 + K_{\perp} + K_{\parallel})/2}$ 之间的狭窄范围内, 恰好接近表面离子等离子体频率 $\Omega_p/\sqrt{2}$ 。

表面铁电振子的群速度不为零, 在长波长情况下, 其群速度方向垂直于波矢方向, 如图4.2 (c) 中低频分支所示。在附录中我们指出, 自由能泛函中电极化的梯度项在较大波数时会显著提高径向方向的群速度。在图4.2 (d) 中, 我们采用铌酸锂的 $g \sim 5.39 \times 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^3/\text{C}^2$, 绘制出低频分支的色散关系。

接下来, 我们讨论表面铁电振子模式及其相关电场的特性, 包括极化和手性。对于表面模式, 当 $k_z = -ic_1\kappa/(1 + c_1)$ 或 $k_z = ic_1\kappa/(1 + c_1)$ (见公式(4.11)) 时, 我们发现 $\mathbf{a} = 0$ 或 $\mathbf{b} = 0$ 。这两种解都表明, 这些波局限于铁电平板的上表面附近, 因为根据公式 (4.7), 它们随离表面距离的变化呈现相同的指数衰减。其中面内动量 κ 是任意的, 这与磁性体系中的对应情况有着显著差异: 铁磁体中的表面磁振子^[91] 在某一表面是单向传播的。我们在附录中列出了两种表面铁电振子的特性, 并重点关注低频分支, 该分支可通过太赫兹光激发频率实现定向传输。

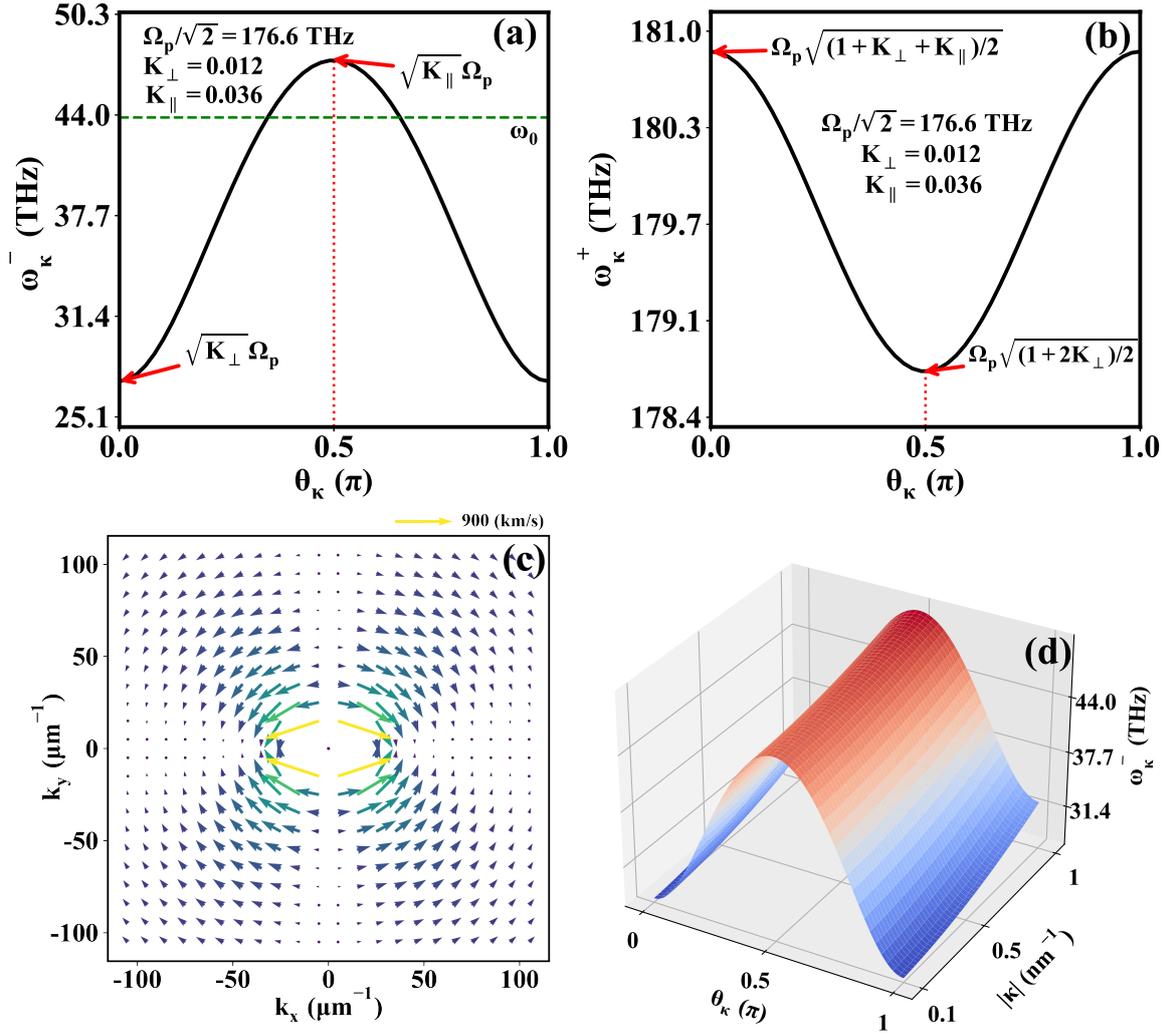


图 4.2 室温下 LiNbO₃ 的表面铁电振子色散关系。(a) 低频支 ω_{κ}^{-} 和 (b) 高频支 ω_{κ}^{+} 。在低频区域，表面铁电振子具有很强的各向异性。它们可以被聚焦激光激发，其传播方向可通过激光频率 ω_0 进行调节。(c) 低频分支的群速度矢量场图。(d) 较高波数下，极化强度 \mathbf{p} 的梯度项对色散的影响。

低频支的本征模 $\mathbf{p}(\boldsymbol{\kappa}, z) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}, z) \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}}^- t)$ ，并且

$$\begin{pmatrix} P_x(\boldsymbol{\kappa}, z) \\ P_y(\boldsymbol{\kappa}, z) \\ P_z(\boldsymbol{\kappa}, z) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} -\kappa/(\delta \sin \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \\ \kappa/(\delta \cos \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \\ i\kappa/(1 - \delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \end{pmatrix} e^{z/\Delta_{\boldsymbol{\kappa}}} \quad (4.13)$$

强烈依赖于传播方向。这里 ξ 是归一化常数， $\Delta_{\boldsymbol{\kappa}} = (1 - \delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}})/(\kappa \delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}})$ 是一个强各向异性的衰减长度。这些波的极化情况取决于刚度差 $\delta = K_{\parallel} - K_{\perp} \rightarrow \varepsilon_0(-2\alpha - \lambda)$ ，而刚度差与温度和材料有关。对于像 LiNbO_3 ^[136] 和 LiTaO_3 ^[138] 这类传统材料，在室温下 $\delta \ll 1$ ，这使得 $\{|p_x(\boldsymbol{\kappa})|, |p_y(\boldsymbol{\kappa})|\} \gg |p_z(\boldsymbol{\kappa})|$ 。 \mathbf{p} 的波动发生在垂直于动量的平面内，这是因为 $\mathbf{p}(\boldsymbol{\kappa}) \cdot \boldsymbol{\kappa} = 0$ 。因此，表面铁电振子是线极化的，不具有手性。然而，表面铁电振子产生的电场却具有强烈的手性。将本征模 (4.13) 代入库仑积分(4.8)可得

$$\mathbf{E}_{\text{out}}^{(d)}(\boldsymbol{\kappa}) = (\hat{\boldsymbol{\kappa}} + i\hat{\mathbf{z}})(\xi\kappa/\varepsilon_0)e^{-\kappa z}e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^- t)}. \quad (4.14)$$

由于该场无散度，即 $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{out}}^{(d)} = 0$ ，所以这个场是圆极化的，其进动轴（或“自旋”方向）由动量传播方向 $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}/\kappa$ 与表面法线 $\hat{\mathbf{z}}$ 的叉积决定，表现出与传播方向相关的手性。

4.3 激光导致的定向传输

用光子对表面铁电振子进行共振激发，最好用量子力学的语言来描述。将涨落展开为表面铁电振子算符 $\hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 和像简谐振子那样归一化的本征模（式 (12)） $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} (\mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}, z) \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}) \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}(t) + \text{H.c.})$ 频率为 ω_0 、傅里叶分量为 $\mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, z)$ 的激光场，与电极化耦合，其哈密顿量为 $\hat{H}_c/\hbar = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^- \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}^\dagger \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}} + \sum_{\boldsymbol{\kappa}} (g_{\boldsymbol{\kappa}} e^{i\omega_0 t} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}} + \text{H.c.})$ 其耦合常数 $g(\boldsymbol{\kappa}) = (-1/\hbar) \int_{-\infty}^0 dz \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}, z) \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, z)$ ，这是根据公式 (3-54) 中的最后一项得出的。根据公式 (4.4) 中的阻尼参数 γ ，铁电振子的衰减率为 $\Gamma = \gamma \varepsilon_0 \Omega_p^2/2$ 。在激发期间，

$$a_{\boldsymbol{\kappa}}(t) \equiv \langle \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}(t) \rangle = g^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega_0 t} / (\omega_0 - \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^- + i\Gamma), \quad (4.15)$$

其中, $\langle \dots \rangle$ 表示系综平均。极化传播方向满足 $\sin^2 \theta_{\mathbf{\kappa}} = ((\omega_0/\Omega_p)^2 - K_{\perp})/\delta$, 而动量主要受激发电场的空间分布限制。稳态下的时空电极化强度为:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{\kappa}} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{\kappa}, z)g^*(\mathbf{\kappa})}{\omega_0 - \omega_{\mathbf{\kappa}} + i\Gamma} e^{i(\mathbf{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_0 t)} + \text{H.c.} \quad (4.16)$$

在图3.2中, 我们展示了对标准铁电体(如 LiNbO_3) 在太赫兹激光光斑照射下表面响应的预测结果。我们将激光光斑视作具有高斯形状的线偏振场, 其尺寸为 σ , 穿透深度为 l , 振幅为 E_0 , 即傅里叶分量 $\mathbf{E}(\mathbf{\kappa}, z) = \pi E_0 \sigma^2 \exp[-(k_x^2 + k_y^2)\sigma^2/4 - z^2/l^2] \hat{\mathbf{x}}$ 。我们选取参数 $2\sigma = 100 \mu\text{m}$, $l = 200 \mu\text{m}$, $E_0 = 50 \text{ kV/cm}$ 以及 $\omega_0 = 2\pi \times 7 \text{ THz}$ 。铁电振子的阻尼率 $\Gamma = 10^{-3}\omega_0$, 这对应着长达约 7.7 mm 的传播长度, 且呈指数衰减, 该衰减长度比此处研究的长度尺度长得多(拟合衰减长度详见附录3)。

图 3.2 (a) 表明, 被激发的表面铁电振子优先向四个方向传播, 与 \mathbf{P}_0 的夹角 $|\theta_0| = |\arcsin \sqrt{[(\omega_0/\Omega_p)^2 - K_{\perp}]/\delta}| \sim 63^\circ$ 与 \mathbf{P}_0 垂直。图3.2 (b) 所示的交叉图案, 表明了表面铁电振子束在实空间中的强准直性, 它是由图3.2 (c) 所示的独特群速度场引起的焦散现象, 使得在样品表面 $z = 0$ 处, $|\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{r})| = \sqrt{p_x^2(\mathbf{r}) + p_y^2(\mathbf{r})}$ 呈现出特征性的十字形图案。定向传输可通过改变 ω_0 进行调节(见附录3)。振幅沿相对于 \mathbf{P}_0 为 $\pi/2 - \theta_0$ 的方向强烈聚焦到一个几十微米宽的通道中。这个方向反映了 $a(\mathbf{\kappa}) \sim \delta(k_x^2 - \tan^2 \theta_0 k_y^2)$ 或 $k_x/k_y \sim \tan \theta_0$ 的傅里叶变换。对波矢积分后, $\exp(i\mathbf{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}) \sim \exp[ik_y(y + x \tan \theta_0)]$ 中的 x 和 y 满足 $y + x \tan \theta_0 \sim 0$ 或 $x/y \sim -\cot \theta_0$ 。交流电极化在这些通道中沿相互平行和反平行的方向流动, 如图3.2中 (b) 的黑色箭头所示。电极化会产生圆极化的手性杂散电场(公式(4.14)), 其空间分布呈现与上述类似的十字形图案。如图 3.2 (c) 和 3 (d) 所示, 分别为表面处面内分量 \mathbf{E}_{\parallel} 和面外分量 E_z 的情况。对这些电场的测量将有助于重建潜在的电极化涨落。面内分量垂直于通道方向振荡, 如图3.2 (c) 中的黑色箭头所示。近场电场的强度可能超过入射激光光斑的强度, 这表明存在显著的等离激元增强。

当平衡极化 $\mathbf{P}_0 \parallel \hat{\mathbf{z}}$ 为面外方向时, 方程(4.6) 具有相同的形式, 并会产生极化涨落垂直于界面且具有各向同性色散的表面态。

目前的计算是在静电近似下进行的, 这种近似适用于相对较大的波数。对于小的波数, 铁电振子会与光子或声子发生杂化, 形成表面铁电振子 - 光子极化激元或表面铁电振子 - 声子极化子, 我们将在未来探讨这些内容。

综上所述, 我们预测长程偶极相互作用会在单轴铁电体中产生表面极化波或表

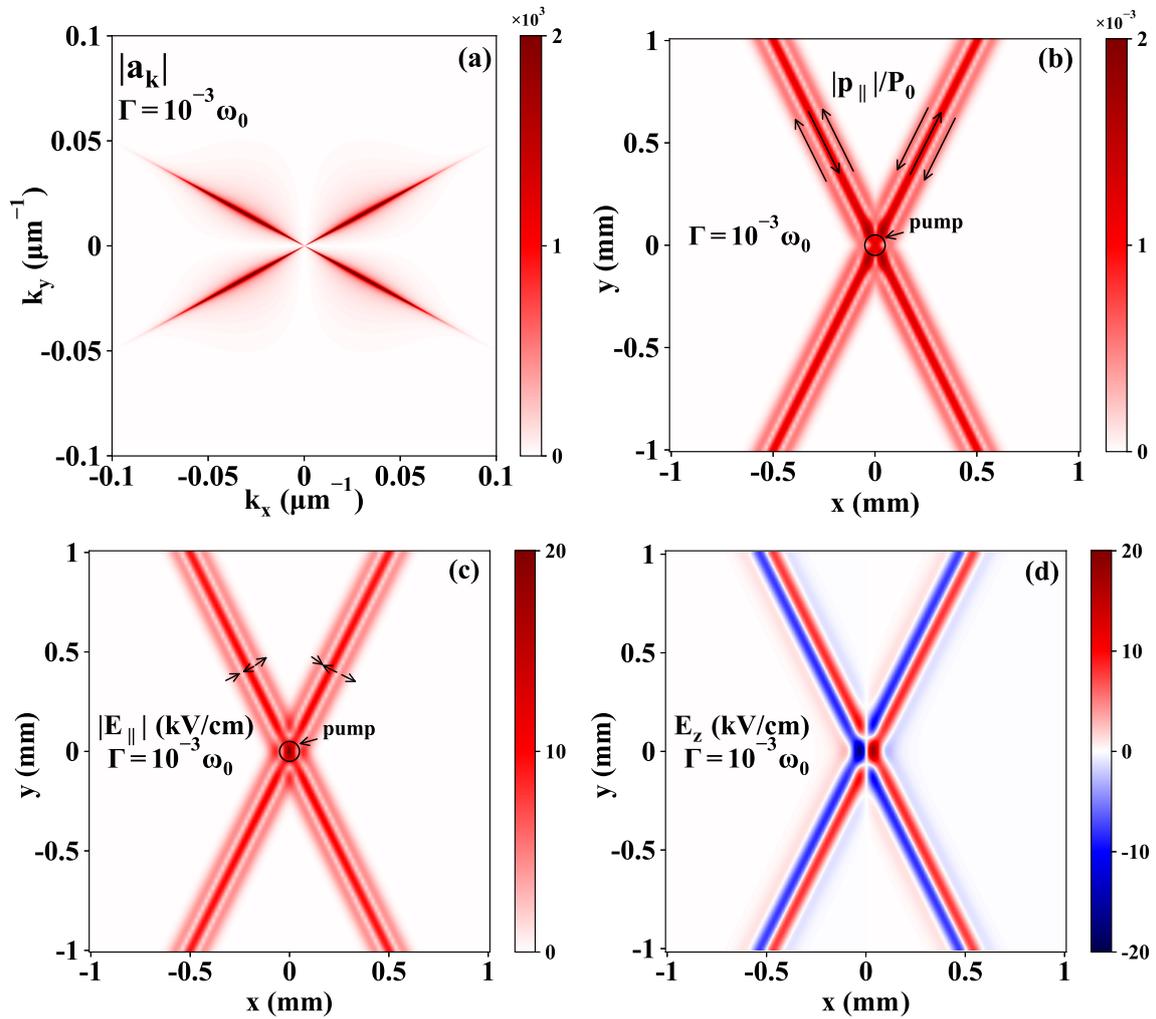


图 4.3 激光光斑共振激发下，铌酸锂 (LiNbO_3) 中表面铁电振子的定向光路由。(a) k 空间中泵浦的表面铁电振子的振幅。在实空间中，如图 (b) 所示，同时被泵浦的铁电振子在微米尺度的通道中发生相长干涉。[(c)、(d)] 分别为处杂散电场的内分量 and 面外分量。(b) 和 (c) 中的箭头分别为面内极化和杂散电场的瞬时图。

面铁电振子。偶极序导致的对称性破缺，会使聚焦太赫兹激光光斑产生强各向异性的发射图案。表面铁电振子显著的各向异性将它们与表面磁振子区分开来。

5 总结

5.1 本文主要内容及结论

本文对铁磁-超导系统的电磁近邻效应做了细致的研究，我们通过严格考虑超导-铁磁系统的边界条件，结合麦克斯韦方程，伦敦方程以及 Landau-Lifshitz-Gilbert 方程，构建了一套求解超导-铁磁薄膜系统中电磁场分布的较为一般的方法。运用此方法，我们从辐射的角度对超导-铁磁系统的各种现象做了详细的阐释与新的预言。

在超导-铁磁双层系统中，超导体能够反射自旋波产生的电磁场，而反射的电磁场又影响了自旋波的传输性质，这导致超导显著地增强自旋波的群速度，与此同时，超导体对于自旋波寿命的影响却很小，因此，在超导体的作用下，自旋波的传播距离被明显地增强，这与实验上^[105]所观测到的现象一致。

另一方面，对于超导-铁磁-超导三层结构，同样地，我们从辐射的角度出发，超越准静态近似，并严格考虑边界条件，成功解释了实验上观测到的铁磁共振频率在超导-铁磁-超导三层结构中产生巨大频移，而在超导-铁磁双层结构中，频移消失的现象。我们指出，对于超导-铁磁绝缘体-超导三层结构，铁磁共振频率也会发生巨大的偏移。值得注意的是，最近，我们的工作也被实验所验证。

之后，注意到磁偶极矩与电偶极矩的对偶性，我们通过由偶极相互作用导致的磁振子表面模式“Damon-Eshbach mode”进行类比，考虑在铁电材料中电偶极矩的偶极相互作用，预测了在铁电材料中表面极化模式，或表面铁振子的存在。我们发现，与磁的表面模式不同，表面铁振子存在两个分支，并且，由于偶极序导致的对称性破缺，表面铁振子具有显著的各向异性，这会导致当表面铁振子被聚焦的激光所激发时，电偶极矩形成独特的定向分布，表面铁电振子显著的各向异性是它们与表面磁振子的显著不同。

致 谢

行文至此，我的硕士研究生生涯即将画上句号。在此，我首先由衷地感谢我的导师于涛教授。我依稀记得，刚入组时，于老师就为我安排了工位与电脑，甚至把自己的算稿给了我让我重复，当时我就觉得跟着这位老师，一定可以学到东西。事实也是如此，在科研过程中，于老师都全程跟进与我们进行讨论。在讨论的过程中，于老师经常会提出尖锐而又深刻的物理问题，常常让我哑口无言，不得不回去重新思考。而就在这一遍又一遍的讨论与思考中，复杂的实验现象被凝练，升华为简洁，清晰的物理图像。而这些物理图像与思路，则是真正的财富，我想，即使在若干年后，我可能忘记了工作的具体推导，但是我依然会记得这样的物理图像。我还要感谢于老师对我的高标准，严要求。实际上，在本科时，自己就是普通的中下水平的学生，自然是有很多毛病与问题，这些问题倘若没人指出，那么自己就不可能进步。在课题组的这段日子里，通过于老师的言传身教，不知不觉中，我已经摆脱中下水平的范畴。最后我还要感谢于老师在生活和科研上给予我的支持。每逢国内外的会议，于老师都带着我们出去参加，极大地扩宽了我的眼界；在研究生后期，由于自己想做实验，且课题组也有实验需求，于老师也全力支持我，把我派到山东大学进行访问交流，学习实验的操作，并且搭建起了实验室。在生活上，于老师给予我充足的补助，并且经常与我们交流，分享自己为人处世的心得。这些宝贵的经验相信对我今后的人生都会起到关键的作用。

我要感谢 Gerrit. E. W. Bauer 老师。作为我第一篇文章的合作老师，虽然与他见面次数不多，然而他对科学问题纯粹的研究态度让人钦佩，在研究中，他总是不断地提出问题，并且深入参与文章的修改，帮助我解决了很多困难。我还要感谢邹继博士和任亚飞老师。他们都对我的文章提出了宝贵的意见和建议，任亚飞老师还指出课题中存在的错误，让我少走了许多弯路。

我要感谢山东大学柏利慧老师，饶金威老师和他们课题组王旭东同学，赵越学姐，田润秋学姐，和米铎林学长等同学，在我访问山大的期间，他们对我毫无保留地教授实验的操作方法与实验技巧，有了他们的帮助，我们才能够较快地搭建好仪器设备，并开始展开测量。

华中科技大学硕士学位论文

我要感谢我们课题组的师兄弟们，在进组初期，蔡成渊师兄和我经常共同讨论问题，互相促进课题的推进。和课题组叶茜茵，邱卓伦，薛治平，黄倩南，李萍，吴文欣同学的讨论也让我获益良多。

我还要感谢本科时我的班主任陈相松老师，他对物理纯粹的态度和对我物理思维的指导让我获益良多，在考研期间，陈老师也给了我很大的支持。我要感谢我的本科舍友徐思研，马徐进和池轶瑄，和他们的交流非常地快乐，并且给了我看待问题的不同视角。

最后，我要感谢我的家人，感谢他们对我的支持和鼓励。无论我遇到什么困难，他们总是为我加油打气，让我有勇气和信心去面对一切挑战。

周熙涵

二〇二五年三月

参考文献

- [1] B. Lenk, H. Ulrichs, F. Garbs, M. Münzenberg. The building blocks of magnonics. *Physics Reports*, 2011, 507(4):107-136.
- [2] A. V. Chumak, V. I. Vasyuchka, A. A. Serga, B. Hillebrands. Magnon spintronics. *Nature Physics*, 2015, 11(6):453-461.
- [3] D. Grundler. Nanomagnonics around the corner. *Nature Nanotechnology*, 2016, 11(5):407-408.
- [4] V. Demidov, S. Urazhdin, G. de Loubens, O. Klein, V. Cros, A. Anane, et al. Magnetization oscillations and waves driven by pure spin currents. *Physics Reports*, 2017, 673:1-31.
- [5] A. Brataas, B. van Wees, O. Klein, G. de Loubens, M. Viret. Spin insulatronics. *Physics Reports*, 2020, 885:1-27.
- [6] A. Barman, G. Gubbiotti, S. Ladak, A. O. Adeyeye, M. Krawczyk, J. Gräfe, et al. The 2021 magnonics roadmap. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2021, 33(41):413001.
- [7] T. Yu, Z. Luo, G. E. Bauer. Chirality as generalized spin-orbit interaction in spintronics. *Physics Reports*, 2023, 1009:1-115.
- [8] L. J. Cornelissen, J. Liu, R. A. Duine, J. B. Youssef, B. J. Wees. Long-distance transport of magnon spin information in a magnetic insulator at room temperature. *Nature Physics*, 2015, 11(12):1022-1026.
- [9] J. Zou, S. Zhang, Y. Tserkovnyak. Topological Transport of Deconfined Hedgehogs in Magnets. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 125:267201.
- [10] X. S. Wang, A. Qaiumzadeh, A. Brataas. Current-Driven Dynamics of Magnetic Hopfions. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123:147203.
- [11] B. Flebus, S. M. Rezende, D. Grundler, A. Barman. Recent advances in magnonics. *Journal of Applied Physics*, 2023, 133(16):160401.
- [12] Y. Kajiwara, K. Harii, S. Takahashi, J. Ohe, K. Uchida, M. Mizuguchi, et al. Transmission of electrical signals by spin-wave interconversion in a magnetic insulator. *Nature*, 2010, 464(7286):262-266.
- [13] Y. Tabuchi, S. Ishino, A. Noguchi, T. Ishikawa, R. Yamazaki, K. Usami, et al. Coherent coupling between a ferromagnetic magnon and a superconducting qubit. *Science*, 2015, 349(6246):405-408.

- [14] V. V. Kruglyak, S. O. Demokritov, D. Grundler. Magnonics. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, 43(26):264001.
- [15] T. Kikkawa, K. Shen, B. Flebus, R. A. Duine, K.-i. Uchida, Z. Qiu, et al. Magnon Polarons in the Spin Seebeck Effect. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 117:207203.
- [16] A. V. Chumak, H. Schultheiss. Magnonics: spin waves connecting charges, spins and photons. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2017, 50(30):300201.
- [17] R. Lebrun, A. Ross, S. A. Bender, A. Qaiumzadeh, L. Baldrati, J. Cramer, et al. Tunable long-distance spin transport in a crystalline antiferromagnetic iron oxide. *Nature*, 2018, 561(7722):222-225.
- [18] K. Harii, Y.-J. Seo, Y. Tsutsumi, H. Chudo, K. Oyanagi, M. Matsuo, et al. Spin Seebeck mechanical force. *Nature Communications*, 2019, 10(1):2616.
- [19] S. S.-L. Zhang, S. Zhang. Magnon Mediated Electric Current Drag Across a Ferromagnetic Insulator Layer. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 109:096603.
- [20] S. S.-L. Zhang, S. Zhang. Spin convertance at magnetic interfaces. *Phys. Rev. B*, 2012, 86:214424.
- [21] S. Takei, B. I. Halperin, A. Yacoby, Y. Tserkovnyak. Superfluid spin transport through antiferromagnetic insulators. *Phys. Rev. B*, 2014, 90:094408.
- [22] S. T. B. Goennenwein, R. Schlitz, M. Pernpeintner, K. Ganzhorn, M. Althammer, R. Gross, et al. Non-local magnetoresistance in YIG/Pt nanostructures. *Applied Physics Letters*, 2015, 107(17):172405.
- [23] L. J. Cornelissen, K. J. H. Peters, G. E. W. Bauer, R. A. Duine, B. J. Wees. Magnon spin transport driven by the magnon chemical potential in a magnetic insulator. *Phys. Rev. B*, 2016, 94:014412.
- [24] J. Li, Y. Xu, M. Aldosary, C. Tang, Z. Lin, S. Zhang, et al. Observation of magnon-mediated current drag in Pt/yttrium iron garnet/Pt(Ta) trilayers. *Nature Communications*, 2016, 7(1):10858.
- [25] J. M. Coey. *Magnetism and magnetic materials*. Cambridge university press, 2010.
- [26] M. Niemeyer, K. Hirsch, V. Zamudio-Bayer, A. Langenberg, M. Vogel, M. Kossick, et al. Spin Coupling and Orbital Angular Momentum Quenching in Free Iron Clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 108:057201.
- [27] C. Kittel. *Introduction to solid state physics*. John Wiley & Sons, 2005.
- [28] L.-S. Xie, G.-X. Jin, L. He, G. E. W. Bauer, J. Barker, K. Xia. First-principles study of exchange interactions of yttrium iron garnet. *Phys. Rev. B*, 2017, 95:014423.

- [29] D. D. Stancil, A. Prabhakar. Spin Waves: Theory and Applications. Boston, MA: Springer US, 2009.
- [30] J. D. Jackson. Classical Electrodynamics. Wiley, New York, 1998.
- [31] A. Clogston, H. Suhl, L. Walker, P. Anderson. Ferromagnetic resonance line width in insulating materials. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1956, 1(3):129-136.
- [32] I. Dzyaloshinsky. A thermodynamic theory of “weak” ferromagnetism of antiferromagnetics. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1958, 4(4):241-255.
- [33] T. Moriya. New Mechanism of Anisotropic Superexchange Interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 1960, 4:228–230.
- [34] M. T. Johnson, P. J. H. Bloemen, F. J. A. Broeder, J. J. Vries. Magnetic anisotropy in metallic multilayers. *Reports on Progress in Physics*, 1996, 59(11):1409.
- [35] B. Dieny, M. Chshiev. Perpendicular magnetic anisotropy at transition metal/oxide interfaces and applications. *Rev. Mod. Phys.*, 2017, 89:025008.
- [36] J. Z. Jun Hu, R. Wu. Engineering magnetic anisotropy in two-dimensional magnetic materials. *Advances in Physics: X*, 2018, 3(1):1432415.
- [37] T. Holstein, H. Primakoff. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Physical Review*, 1940, 58(12):1098.
- [38] C. Soliv erez. Electrostatics and Magnetostatics of Polarized Ellipsoidal Bodies: The Depolarization Tensor Method. *Free Scientific Information*, 07, 2016.
- [39] J. A. Osborn. Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid. *Phys. Rev.*, 1945, 67:351–357.
- [40] E. C. Stoner. XCVII. The demagnetizing factors for ellipsoids. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1945, 36(263):803–821.
- [41] L. D. Landau, J. S. Bell, M. Kearsley, L. Pitaevskii, E. Lifshitz, J. Sykes. *Electrodynamics of continuous media*. elsevier, 2013.
- [42] L. R. Walker. Magnetostatic Modes in Ferromagnetic Resonance. *Phys. Rev.*, 1957, 105:390–399.
- [43] R. Verba, G. Melkov, V. Tiberkevich, A. Slavin. Collective spin-wave excitations in a two-dimensional array of coupled magnetic nanodots. *Phys. Rev. B*, 2012, 85:014427.
- [44] F. London, H. London, F. A. Lindemann. The electromagnetic equations of the superconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 1935, 149(866):71-88.
- [45] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, New York, 2004.

- [46] A. T. G. Janssønn, H. T. Simensen, A. Kamra, A. Brataas, S. H. Jacobsen. Macroscale nonlocal transfer of superconducting signatures to a ferromagnet in a cavity. *Phys. Rev. B*, 2020, 102:180506.
- [47] T. Yu, M. W. Wu. Gauge-invariant theory of quasiparticle and condensate dynamics in response to terahertz optical pulses in superconducting semiconductor quantum wells. I. *s*-wave superconductivity in the weak spin-orbit coupling limit. *Phys. Rev. B*, 2017, 96:155311.
- [48] J. C. Swihart. Field Solution for a Thin-Film Superconducting Strip Transmission Line. *Journal of Applied Physics*, 1961, 32(3):461-469.
- [49] A. V. Chumak, A. A. Serga, B. Hillebrands. Magnon transistor for all-magnon data processing. *Nature Communications*, 2014, 5(1):4700.
- [50] A. Khitun, M. Bao, K. L. Wang. Magnonic logic circuits. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, 43(26):264005.
- [51] A. Mahmoud, F. Ciubotaru, F. Vanderveken, A. V. Chumak, S. Hamdioui, C. Adelman, et al. Introduction to spin wave computing. *Journal of Applied Physics*, 2020, 128(16):161101.
- [52] T. Yu, G. E. W. Bauer. Efficient Gating of Magnons by Proximity Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 2022, 129:117201.
- [53] I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, A. V. Ustinov. Modified dispersion law for spin waves coupled to a superconductor. *Journal of Applied Physics*, 2018, 124(23):233903.
- [54] I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, A. A. Golubov, V. V. Ryazanov, A. V. Ustinov. Nonlinear spin waves in ferromagnetic/superconductor hybrids. *Journal of Applied Physics*, 2020, 127(9):093903.
- [55] M. A. Kuznetsov, A. A. Fraerman. Temperature-sensitive spin-wave nonreciprocity induced by interlayer dipolar coupling in ferromagnet/paramagnet and ferromagnet/superconductor hybrid systems. *Phys. Rev. B*, 2022, 105:214401.
- [56] J. Kharlan, K. Sobucki, K. Szulc, S. Memarzadeh, J. W. Kłos. Spin-wave confinement in a hybrid superconductor-ferrimagnet nanostructure. *Phys. Rev. Appl.*, 2024, 21:064007.
- [57] D. S. Katkov, S. S. Apostoloff, I. S. Burmistrov. Bound States and Scattering of Magnons on a Superconducting Vortex in Ferromagnet–Superconductor Heterostructures. *JETP Letters*, 2024, 120(9):655-663.
- [58] J. Kharlan, K. Szulc, J. W. Kłos, G. Centała. Tunable magnonic crystal in a hybrid superconductor–ferrimagnet nanostructure. *Scientific Reports*, 2024, 14(1):25594.

- [59] X.-H. Zhou, X. Ye, L. Bai, T. Yu. Giant enhancement of magnon transport by superconductor Meissner screening. *Phys. Rev. B*, 2024, 110:L020404.
- [60] O. V. Dobrovolskiy, R. Sachser, T. Brächer, T. Böttcher, V. V. Kruglyak, R. V. Vovk, et al. Magnon–fluxon interaction in a ferromagnet/superconductor heterostructure. *Nature Physics*, 2019, 15(5):477-482.
- [61] O. V. Dobrovolskiy, A. V. Chumak. Nonreciprocal magnon fluxonics upon ferromagnet/superconductor hybrids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2022, 543:168633.
- [62] B. Niedzielski, C. Jia, J. Berakdar. Magnon-Fluxon Interaction in Coupled Superconductor/Ferromagnet Hybrid Periodic Structures. *Phys. Rev. Appl.*, 2023, 19:024073.
- [63] O. V. Dobrovolskiy, Q. Wang, D. Y. Vodolazov, B. Budinska, S. Knauer, R. Sachser, et al. Cherenkov radiation of spin waves by ultra-fast moving magnetic flux quanta, 2023. <https://arxiv.org/abs/2103.10156>.
- [64] I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, V. V. Bolginov, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, et al. Ferromagnet/Superconductor Hybridization for Magnonic Applications. *Advanced Functional Materials*, 2018, 28(33):1802375.
- [65] I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, P. S. Dzhumaev, O. V. Emelyanova, A. A. Golubov, et al. Ferromagnet/Superconductor Hybrid Magnonic Metamaterials. *Advanced Science*, 2019, 6(16):1900435.
- [66] M. Silaev. Ultrastrong magnon-photon coupling, squeezed vacuum, and entanglement in superconductor/ferromagnet nanostructures. *Phys. Rev. B*, 2023, 107:L180503.
- [67] M. Silaev. Anderson-Higgs Mass of Magnons in Superconductor-Ferromagnet-Superconductor Systems. *Phys. Rev. Appl.*, 2022, 18:L061004.
- [68] L.-L. Li, Y.-L. Zhao, X.-X. Zhang, Y. Sun. Possible Evidence for Spin-Transfer Torque Induced by Spin-Triplet Supercurrents. *Chinese Physics Letters*, 2018, 35(7):077401.
- [69] K.-R. Jeon, C. Ciccarelli, H. Kurebayashi, L. F. Cohen, X. Montiel, M. Eschrig, et al. Effect of Meissner Screening and Trapped Magnetic Flux on Magnetization Dynamics in Thick Nb/Ni₈₀Fe₂₀/Nb Trilayers. *Phys. Rev. Appl.*, 2019, 11:014061.
- [70] I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, M. Weides, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, et al. Ultrastrong photon-to-magnon coupling in multilayered heterostructures involving superconducting coherence via ferromagnetic layers. *Science Advances*, 2021, 7(25):eabe8638.
- [71] S. Seshadri. Surface magnetostatic modes of a ferrite slab. *Proceedings of the IEEE*, 1970, 58(3):506-507.

- [72] M. Mruczkiewicz, M. Krawczyk, G. Gubbiotti, S. Tacchi, Y. A. Filimonov, D. V. Kalyabin, et al. Nonreciprocity of spin waves in metallized magnonic crystal. *New Journal of Physics*, 2013, 15(11):113023.
- [73] M. Mruczkiewicz, M. Krawczyk. Nonreciprocal dispersion of spin waves in ferromagnetic thin films covered with a finite-conductivity metal. *Journal of Applied Physics*, 2014, 115(11):113909.
- [74] M. Kostylev. Coupling of microwave magnetic dynamics in thin ferromagnetic films to stripline transducers in the geometry of the broadband stripline ferromagnetic resonance. *Journal of Applied Physics*, 2016, 119(1):013901.
- [75] S. A. Bunyaev, R. O. Serha, H. Y. Musiienko-Shmarova, A. J. Kreil, P. Frey, D. A. Bozhko, et al. Spin-Wave Relaxation by Eddy Currents in $Y_3Fe_5O_{12}/Pt$ Bilayers and a Way to Suppress It. *Phys. Rev. Appl.*, 2020, 14:024094.
- [76] I. Bertelli, B. G. Simon, T. Yu, J. Aarts, G. E. W. Bauer, Y. M. Blanter, et al. Imaging Spin-Wave Damping Underneath Metals Using Electron Spins in Diamond. *Advanced Quantum Technologies*, 2021, 4(12):2100094.
- [77] X. Ye, K. Xia, G. E. W. Bauer, T. Yu. Chiral-damping-enhanced magnon transmission. *Phys. Rev. Appl.*, 2024, 22:L011001.
- [78] M. Mruczkiewicz, P. Graczyk, P. Lupo, A. Adeyeye, G. Gubbiotti, M. Krawczyk. Spin-wave nonreciprocity and magnonic band structure in a thin permalloy film induced by dynamical coupling with an array of Ni stripes. *Phys. Rev. B*, 2017, 96:104411.
- [79] J. Chen, H. Wang, T. Hula, C. Liu, S. Liu, T. Liu, et al. Reconfigurable Spin-Wave Interferometer at the Nanoscale. *Nano Letters*, 2021, 21(14):6237-6244.
- [80] O. A. Santos, B. J. Wees. Magnon Confinement in an All-on-Chip YIG Cavity Resonator Using Hybrid YIG/Py Magnon Barriers. *Nano Letters*, 2023, 23(20):9303-9309.
- [81] J. Han, Y. Fan, B. C. McGoldrick, J. Finley, J. T. Hou, P. Zhang, et al. Nonreciprocal Transmission of Incoherent Magnons with Asymmetric Diffusion Length. *Nano Letters*, 2021, 21(16):7037-7043.
- [82] Y. W. Xing, Z. R. Yan, X. F. Han. Magnon valve effect and resonant transmission in a one-dimensional magnonic crystal. *Phys. Rev. B*, 2021, 103:054425.
- [83] M. Cosset-Chéneau, S. H. Tirion, X.-Y. Wei, J. Ben Youssef, B. J. Wees. Nonreciprocal transport of thermally generated magnons. *Phys. Rev. B*, 2024, 110:214418.
- [84] T. Yu, C. Cai, G. E. W. Bauer. Chirality enables thermal magnon transistors. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2024, 67(4):247511.

- [85] K. G. Fripp, A. V. Shytov, V. V. Kruglyak. Spin-wave control using dark modes in chiral magnonic resonators. *Phys. Rev. B*, 2021, 104:054437.
- [86] Z. Hu, L. Fu, L. Liu. Tunable Magnonic Chern Bands and Chiral Spin Currents in Magnetic Multilayers. *Phys. Rev. Lett.*, 2022, 128:217201.
- [87] T. Yu, H. Wang, M. A. Sentef, H. Yu, G. E. W. Bauer. Magnon trap by chiral spin pumping. *Phys. Rev. B*, 2020, 102:054429.
- [88] J. Chen, T. Yu, C. Liu, T. Liu, M. Madami, K. Shen, et al. Excitation of unidirectional exchange spin waves by a nanoscale magnetic grating. *Phys. Rev. B*, 2019, 100:104427.
- [89] M. Grassi, M. Geilen, D. Louis, M. Mohseni, T. Brächer, M. Hehn, et al. Slow-Wave-Based Nanomagnonic Diode. *Phys. Rev. Appl.*, 2020, 14:024047.
- [90] J. Chen, H. Yu, G. Gubbiotti. Unidirectional spin-wave propagation and devices. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2021, 55(12):123001.
- [91] R. Damon, J. Eshbach. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1961, 19(3):308-320.
- [92] S. P. Chockalingam, M. Chand, J. Jesudasan, V. Tripathi, P. Raychaudhuri. Superconducting properties and Hall effect of epitaxial NbN thin films. *Phys. Rev. B*, 2008, 77:214503.
- [93] I. M. Nefedov, A. A. Fraerman, I. A. Shereshevskii. Magnetostatic mechanism for control of chirality of magnetization distributions. *Physics of the Solid State*, 2016, 58(3):503-507.
- [94] I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, V. V. Bolginov, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, et al. Ferromagnet/Superconductor Hybridization for Magnonic Applications. *Advanced Functional Materials*, 2018, 28(33):1802375.
- [95] M. Borst, P. H. Vree, A. Lowther, A. Teepe, S. Kurdi, I. Bertelli, et al. Observation and control of hybrid spin-wave-Meissner-current transport modes. *Science*, 2023, 382(6669):430-434.
- [96] I. Golovchanskiy, N. Abramov, V. Stolyarov, V. Chichkov, M. Silaev, I. Shchetinin, et al. Magnetization Dynamics in Proximity-Coupled Superconductor-Ferromagnet-Superconductor Multilayers. *Phys. Rev. Appl.*, 2020, 14:024086.
- [97] I. Golovchanskiy, N. Abramov, O. Emelyanova, I. Shchetinin, V. Ryazanov, A. Golubov, et al. Magnetization Dynamics in Proximity-Coupled Superconductor-Ferromagnet-Superconductor Multilayers. II. Thickness Dependence of the Superconducting Torque. *Phys. Rev. Appl.*, 2023, 19:034025.

- [98] S. V. Mironov, A. I. Buzdin. Giant demagnetization effects induced by superconducting films. *Applied Physics Letters*, 2021, 119(10):102601.
- [99] V. Cherepanov, I. Kolokolov, V. L'vov. The saga of YIG: Spectra, thermodynamics, interaction and relaxation of magnons in a complex magnet. *Physics Reports*, 1993, 229(3):81-144.
- [100] A. Serga, A. Chumak, B. Hillebrands. YIG magnonics. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, 43(26):264002-264022.
- [101] C. Liu, J. Chen, T. Liu, F. Heimbach, H. Yu, Y. Xiao, et al. Long-distance propagation of short-wavelength spin waves. *Nature Communications*, 2018, 9(1):738.
- [102] X.-Y. Wei, O. A. Santos, C. H. S. Lusero, G. E. W. Bauer, J. Ben Youssef, B. J. Wees. Giant magnon spin conductivity in ultrathin yttrium iron garnet films. *Nature Materials*, 2022, 21(12):1352-1356.
- [103] J. Chen, T. Yu, C. Liu, T. Liu, M. Madami, K. Shen, et al. Excitation of unidirectional exchange spin waves by a nanoscale magnetic grating. *Phys. Rev. B*, 2019, 100:104427.
- [104] J. Schrieffer. *Theory of Superconductivity*. Inc., New York, 1964.
- [105] M. Borst, P. H. Vree, A. Lowther, A. Teepe, S. Kurdi, I. Bertelli, et al. Observation and control of hybrid spin-wave–Meissner-current transport modes. *Science*, 2023, 382(6669):430-434.
- [106] M. P. Tu, K. Mbaye, L. Wartski, J. Halbritter. rf characterization of thermally diffused superconducting niobium nitride. *Journal of Applied Physics*, 1988, 63(9):4586-4590.
- [107] A. Kawakami, Y. Uzawa, Z. Wang. Frequency dependence of penetration depth for epitaxial NbN thin films at 0.1–1.1 THz. *Physica C: Superconductivity*, 2004, 412-414:1455-1458.
- [108] T. Shapoval, H. Stopfel, S. Haindl, J. Engelmann, D. S. Inosov, B. Holzapfel, et al. Quantitative assessment of pinning forces and magnetic penetration depth in NbN thin films from complementary magnetic force microscopy and transport measurements. *Phys. Rev. B*, 2011, 83:214517.
- [109] S. Knauer, K. Davidková, D. Schmoll, R. O. Serha, A. Voronov, Q. Wang, et al. Propagating spin-wave spectroscopy in a liquid-phase epitaxial nanometer-thick YIG film at millikelvin temperatures. *Journal of Applied Physics*, 2023, 133(14):143905.
- [110] H. Chang, P. Li, W. Zhang, T. Liu, A. Hoffmann, L. Deng, et al. Nanometer-Thick Yttrium Iron Garnet Films With Extremely Low Damping. *IEEE Magnetics Letters*, 2014, 5:1-4.

- [111] M. A. W. Schoen, D. Thonig, M. L. Schneider, T. J. Silva, H. T. Nembach, O. Eriksson, et al. Ultra-low magnetic damping of a metallic ferromagnet. *Nature Physics*, 2016, 12(9):839-842.
- [112] Y. Sun, F. Meng, C. Lee, A. Soll, H. Zhang, R. Ramesh, et al. Dipolar spin wave packet transport in a van der Waals antiferromagnet. *Nature Physics*, 2024, 20(5):794-800.
- [113] H. Wang, R. Yuan, Y. Zhou, Y. Zhang, J. Chen, S. Liu, et al. Long-Distance Coherent Propagation of High-Velocity Antiferromagnetic Spin Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 2023, 130:096701.
- [114] D. B. Fischbach. Diamagnetic Susceptibility of Pyrolytic Graphite. *Phys. Rev.*, 1961, 123:1613–1614.
- [115] Y. Fuseya, M. Ogata, H. Fukuyama. Transport Properties and Diamagnetism of Dirac Electrons in Bismuth. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2015, 84(1):012001.
- [116] L. D. Landau, J. S. Bell, M. Kearsley, L. Pitaevskii, E. Lifshitz, J. Sykes. *Electrodynamics of continuous media*. elsevier, 2013.
- [117] T. Yu, G. E. W. Bauer. Efficient Gating of Magnons by Proximity Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 2022, 129:117201.
- [118] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, New York, 2004.
- [119] X.-Y. Wei, O. A. Santos, C. H. S. Lusero, G. E. W. Bauer, J. Ben Youssef, B. J. Wees. Giant magnon spin conductivity in ultrathin yttrium iron garnet films. *Nature Materials*, 2022, 21(12):1352-1356.
- [120] S. Knauer, K. Davidková, D. Schmoll, R. O. Serha, A. Voronov, Q. Wang, et al. Propagating spin-wave spectroscopy in a liquid-phase epitaxial nanometer-thick YIG film at millikelvin temperatures. *Journal of Applied Physics*, 2023, 133(14):143905.
- [121] S. M. Rezende. *Fundamentals of Magnonics*. Cham: Springer International Publishing, 2020.
- [122] M. P. Tu, K. Mbaye, L. Wartski, J. Halbritter. rf characterization of thermally diffused superconducting niobium nitride. *Journal of Applied Physics*, 1988, 63(9):4586-4590.
- [123] C. Kittel. On the Theory of Ferromagnetic Resonance Absorption. *Phys. Rev.*, 1948, 73:155–161.
- [124] O. W. Dietrich, A. J. Henderson, H. Meyer. Spin-wave analysis of specific heat and magnetization in EuO and EuS. *Phys. Rev. B*, 1975, 12:2844–2855.
- [125] S. P. Chockalingam, M. Chand, J. Jesudasan, V. Tripathi, P. Raychaudhuri. Superconducting properties and Hall effect of epitaxial NbN thin films. *Phys. Rev. B*, 2008, 77:214503.

- [126] J. Li, J. Zhang, G. Yang, W. Zhao. Efficient shift of ferromagnetic resonance by superconductor gating. *Applied Physics Reviews*, 2025, 12(1):011419.
- [127] G. E. Bauer, P. Tang, R. Iguchi, K. Uchida. Magnonics vs. Ferronics. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2022, 541:168468.
- [128] G. Bauer, P. Tang, R. Iguchi, J. Xiao, K. Shen, Z. Zhong, et al. Polarization transport in ferroelectrics. *Phys. Rev. Appl.*, 2023, 20:050501.
- [129] K. M. Rabe, C. H. Ahn, J.-M. Triscone. *Physics of ferroelectrics: a modern perspective*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [130] G. E. W. Bauer, R. Iguchi, K.-i. Uchida. Theory of Transport in Ferroelectric Capacitors. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126:187603.
- [131] P. Tang, R. Iguchi, K.-i. Uchida, G. E. W. Bauer. Thermoelectric Polarization Transport in Ferroelectric Ballistic Point Contacts. *Phys. Rev. Lett.*, 2022, 128:047601.
- [132] P. Tang, K.-i. Uchida, G. E. W. Bauer. Nonlocal drag thermoelectricity generated by ferroelectric van der Waals heterostructures. *Phys. Rev. B*, 2023, 107:L121406.
- [133] B. L. Wooten, R. Iguchi, P. Tang, J. S. Kang, K. Uchida, G. E. W. Bauer, et al. Electric field - dependent phonon spectrum and heat conduction in ferroelectrics. *Science Advances*, 2023, 9(5):eadd7194.
- [134] P. Tang, R. Iguchi, K.-i. Uchida, G. E. W. Bauer. Excitations of the ferroelectric order. *Phys. Rev. B*, 2022, 106:L081105.
- [135] S. Zhuang, J.-M. Hu. Role of polarization-photon coupling in ultrafast terahertz excitation of ferroelectrics. *Phys. Rev. B*, 2022, 106:L140302.
- [136] D. A. Scrymgeour, V. Gopalan, A. Itagi, A. Saxena, P. J. Swart. Phenomenological theory of a single domain wall in uniaxial trigonal ferroelectrics: Lithium niobate and lithium tantalate. *Phys. Rev. B*, 2005, 71:184110.
- [137] P. Tang, R. Iguchi, K.-i. Uchida, G. E. W. Bauer. Excitations of the ferroelectric order. *Phys. Rev. B*, 2022, 106:L081105.
- [138] I. Tomeno, S. Matsumura. Dielectric properties of LiTaO_3 . *Phys. Rev. B*, 1988, 38:606–614.

附录 1 攻读硕士学位期间取得的研究成果

发表与接收论文

- [1] **Xi-Han Zhou** and Tao. Yu. Gating ferromagnetic resonance of magnetic insulators by superconductors via modulating electric field radiation. *Physical Review B*, 2023, 108: 144405. (第一单位: 华中科技大学)
- [2] **Xi-Han Zhou**, Chengyuan Cai, Ping Tang, R. L. Rodríguez-Suárez, Sergio M. Rezende, Gerrit E. W. Bauer, Tao Yu. Surface Ferron Excitations in Ferroelectrics and Their Directional Routing. *Chinese Physics Letters*, 2023, 40: 087103. (第一单位: 华中科技大学)
- [3] **Xi-Han Zhou**, Xiyin Ye, Lihui Bai, Tao Yu. Giant enhancement of magnon transport by superconductor Meissner screening. *Physical Review B*, 2024, 110: L020404. (第一单位: 华中科技大学)
- [4] **Xi-Han Zhou**, Xiyin Ye, and Tao Yu. Chiral Locking of Magnon Flow and Electron Spin Accumulation in Their Near-Field Radiative Spin Transfer. arXiv: 2504.13578. (第一单位: 华中科技大学)
- [5] Chengyuan Cai, **Xi-Han Zhou** (共同一作), Weichao Yu, Tao Yu. Acoustic frequency multiplication and pure second-harmonic generation of phonons by magnetic transducers. *Physical Review B*, 2023, 107: L100410.
- [6] Zhuolun Qiu, **Xi-Han Zhou** (共同一作), Hanchen Wang, Guang Yang, Tao Yu. Persistent nodal magnon-photon polariton in ferromagnetic heterostructures. *Physical Review B*, 2024, 110: 184403.
- [7] R. L. Rodríguez-Suárez, **Xi-Han Zhou**, Chengyuan Cai, Ping Tang, Tao Yu, Gerrit E. W. Bauer, Sergio M. Rezende. Surface and volume modes of polarization waves in ferroelectric films. *Physical Review B*, 2024, 109: 134307.

附录 2 攻读硕士学位期间参与的科研项目

1. 科技部重点研发项目

项目名称: 低维磁性-超导系统的量子物理与器件集成

项目编号: No. 2023YFA1406600

起止时间: 2023 年 12 月-2028 年 12 月

担任角色: 参与者

2. 国家自然科学基金面上项目

项目名称: 利用超导体局域调控磁子模式及磁子热自旋流的研究

项目编号: No. 12374109

起止时间: 2023 年 12 月-2027 年 12 月

担任角色: 参与者

附录3 表面铁振子的推导计算

3.1 特征方程及推导

在这里，我们推导两个特征方程，这两个方程描述了均匀电介质中频率为 ω 的电极化强度 \mathbf{p} 的激发情况。对于厚度为 d 且表面存在反射的铁电材料，

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{a}e^{ik_z z} + \mathbf{b}e^{-ik_z z}) e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)}, \quad (3-1)$$

其中， \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 是平面内波矢为 $\boldsymbol{\kappa} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ 的驻波振幅， $\boldsymbol{\rho} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}$ 是平面内坐标，而 k_z 和 z 是垂直于薄膜平面的波矢与坐标。由这样的波所发出的偶极电场可根据库仑定律得出，其形式为

$$E_j^{(d)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \partial_j \partial_i \int \frac{f_i(z') e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (3-2)$$

在对重复空间指标采用求和约定的情况下， $f_i(z) = a_i e^{ik_z z} + b_i e^{-ik_z z}$ 。利用 Weyl 恒等式^[7]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dk'_x dk'_y \frac{e^{ik'_x(x-x') + ik'_y(y-y')} e^{-\sqrt{k_x'^2 + k_y'^2} |z-z'|}}{2\pi \sqrt{k_x'^2 + k_y'^2}},$$

方程 (3-2) 变为

$$E_j^{(d)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\epsilon_0} e^{-i\omega t} \partial_j \partial_i \int_{-d}^0 dz' f_i(z') \frac{e^{-\kappa |z-z'|}}{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}}. \quad (3-3)$$

代入方程 $f_i(z)$,

$$\mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)} \int_{-d}^0 dz' \mathcal{G}(z - z') \begin{pmatrix} a_x e^{ik_z z'} + b_x e^{-ik_z z'} \\ a_y e^{ik_z z'} + b_y e^{-ik_z z'} \\ a_z e^{ik_z z'} + b_z e^{-ik_z z'} \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

可以用格林函数张量来表示

$$\mathcal{G}(z - z') =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_x^2}{2\kappa} e^{-\kappa|z-z'|} & -\frac{k_x k_y}{2\kappa} e^{-\kappa|z-z'|} & -\frac{i k_x}{2} \operatorname{sgn}(z-z') e^{-\kappa|z-z'|} \\ -\frac{k_x k_y}{2\kappa} e^{-\kappa|z-z'|} & -\frac{k_y^2}{2\kappa} e^{-\kappa|z-z'|} & -\frac{i k_y}{2} \operatorname{sgn}(z-z') e^{-\kappa|z-z'|} \\ -\frac{i k_x}{2} \operatorname{sgn}(z-z') e^{-\kappa|z-z'|} & -\frac{i k_y}{2} \operatorname{sgn}(z-z') e^{-\kappa|z-z'|} & \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|z-z'|} - \delta(z-z') \end{pmatrix}. \quad (3-5)$$

在这里， $\delta(z-z')$ 是在铁电材料内部定义的，即 $-d \leq \{z, z'\} \leq 0$ ，在铁电材料外部其值为零。杂散电场 $\mathbf{E}^{(d)}$ 满足麦克斯韦方程组的边界条件，也就是在铁电材料表面处电磁场和电流的连续性条件根据格林函数张量式 (3-5)，

$$k_y E_x^{(d)} = k_x E_y^{(d)} \quad (3-6)$$

这意味着杂散电场 $\mathbf{E}^{(d)}$ 的圆偏振方向与其平面内波矢相互锁定。在对方程 (3-4) 中的 z' 进行积分之后，我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{\varepsilon_0} e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{k_x^2}{k^2} & -\frac{k_x k_y}{k_y^2} & -\frac{k_x k_z}{k_z^2} \\ -\frac{k_x k_y}{k_x k_z} & -\frac{k_y^2}{k_y^2} & -\frac{k_y k_z}{k_z^2} \\ -\frac{k_x k_z}{k^2} & -\frac{k_y k_z}{k^2} & -\frac{k_z^2}{k^2} \end{pmatrix} e^{i k_z z} \right. \\ & + \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{2\kappa} & \frac{k_x k_y}{2\kappa} & -\frac{i k_x}{2} \\ \frac{k_x k_y}{2\kappa} & \frac{k_y^2}{2\kappa} & -\frac{i k_y}{2} \\ -\frac{i k_x}{2} & -\frac{i k_y}{2} & \frac{\kappa}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\kappa - i k_z} e^{\kappa z} \\ & + \left. \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{2\kappa} & \frac{k_x k_y}{2\kappa} & \frac{i k_x}{2} \\ \frac{k_x k_y}{2\kappa} & \frac{k_y^2}{2\kappa} & \frac{i k_y}{2} \\ \frac{i k_x}{2} & \frac{i k_y}{2} & -\frac{\kappa}{2} \end{pmatrix} \frac{e^{-d(\kappa + i k_z)}}{\kappa + i k_z} e^{-\kappa z} \right\} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{\varepsilon_0} e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)} \{k_z \rightarrow -k_z\} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (3-7) \end{aligned}$$

电极化强度的运动方程可由唯象的 Landau-Khalatnikov-Tani 方程来描述。

$$(1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_x + K_{\perp} p_x = \varepsilon_0 E_x^{(d)},$$

$$\begin{aligned} (1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_y + K_{\parallel} p_y &= \varepsilon_0 E_y^{(d)}, \\ (1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_z + K_{\perp} p_z &= \varepsilon_0 E_z^{(d)}, \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中, $K_{\perp} = \varepsilon_0 \lambda$ 和 $K_{\parallel} = \varepsilon_0 (\alpha + 3\beta P_0^2)$ 是两个无量纲参数, 分别表征了横向和纵向涨落的劲度。然后, 我们将方程 (3-7) 代入方程 (3-8), 在此过程中, $e^{ik_z z}$ 、 $e^{-ik_z z}$ 、 $e^{\kappa z}$ 和 $e^{-\kappa z}$ 的系数应当为零。这些条件所给出的方程将闭合如下所示的两个特征方程

对于 $e^{ik_z z}$ 和 $e^{-ik_z z}$ 的系数, 我们可以得到两个久期方程

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_x^2}{k^2} - c_1 & -\frac{k_x k_y}{k^2} & -\frac{k_x k_z}{k^2} \\ -\frac{k_x k_y}{k^2} & -\frac{k_y^2}{k^2} - c_2 & -\frac{k_y k_z}{k^2} \\ -\frac{k_x k_z}{k^2} & -\frac{k_y k_z}{k^2} & -\frac{k_z^2}{k^2} - c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = 0, \quad (3-9a)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_x^2}{k^2} - c_1 & -\frac{k_x k_y}{k^2} & \frac{k_x k_z}{k^2} \\ -\frac{k_x k_y}{k^2} & -\frac{k_y^2}{k^2} - c_2 & \frac{k_y k_z}{k^2} \\ \frac{k_x k_z}{k^2} & \frac{k_y k_z}{k^2} & -\frac{k_z^2}{k^2} - c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0, \quad (3-9b)$$

其中, $c_1 = -(\omega/\Omega_p)^2 + K_{\perp}$ 和 $c_2 = -(\omega/\Omega_p)^2 + K_{\parallel}$ 是无量纲的, 这在正文里也有定义。这两个方程的行列式为零会得出第一个特征方程

$$c_1 c_2 k^2 + c_1 k_y^2 + c_2 (k_x^2 + k_z^2) = 0. \quad (3-10)$$

此外, 从方程 (3-9) 中可以得到波振幅之间的几个关系。

$$\begin{aligned} c_1 k_y a_x &= c_2 k_x a_y, & c_1 k_y b_x &= c_2 k_x b_y, \\ c_1 k_z a_x &= c_1 k_x a_z, & -c_1 k_z b_x &= c_1 k_x b_z, \\ c_2 k_z a_y &= c_1 k_y a_z, & -c_2 k_z b_y &= c_1 k_y b_z. \end{aligned} \quad (3-11)$$

从 $e^{\kappa z}$ 和 $e^{-\kappa z}$ 的系数中, 我们仅能得到两个独立的方程, 但存在六个未知数 $\{a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z\}$ 。为了得到第二个特征方程, 我们需要将这两个方程与从方程

(3-9) 得到的四个独立关系相结合, 从而得到

$$\begin{pmatrix} -\frac{ik_x}{2(\kappa - ik_z)} & -\frac{ik_y}{2(\kappa - ik_z)} & -\frac{\kappa}{2(\kappa - ik_z)} & -\frac{ik_x}{2(\kappa + ik_z)} & -\frac{ik_y}{2(\kappa + ik_z)} & -\frac{\kappa}{2(\kappa + ik_z)} \\ \frac{ik_x}{2}B & \frac{ik_y}{2}B & -\frac{\kappa}{2}B & \frac{ik_x}{2}A & \frac{ik_y}{2}A & -\frac{\kappa}{2}A \\ -k_x^2 - c_1k^2 & -k_xk_y & -k_xk_z & 0 & 0 & 0 \\ -k_xk_y & -k_y^2 - c_2k^2 & -k_yk_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_x^2 - c_1k^2 & -k_xk_y & k_xk_z \\ 0 & 0 & 0 & -k_xk_y & -k_y^2 - c_2k^2 & k_yk_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0, \quad (3-12)$$

其中 $A = e^{-d(\kappa - ik_z)}/(\kappa - ik_z)$, $B = e^{-d(\kappa + ik_z)}/(\kappa + ik_z)$ 。令这个 6×6 矩阵的行列式为零, 我们就能得到第二个特征方程。

$$\begin{aligned} & e^{idk_z}(c_2k_x^2 + c_1k_y^2 + c_1c_2\kappa^2 + ic_1c_2\kappa k_z)^2 \\ & - e^{-idk_z}(c_2k_x^2 + c_1k_y^2 + c_1c_2\kappa^2 - ic_1c_2\kappa k_z)^2 = 0. \end{aligned}$$

方程 (3-13) 表明, k_z 存在几个与 k_x 、 k_y 和 ω 相关的根。复的 $k_z = \eta_1 + i\eta_2$ 是方程 (3-13) 的解, 我们可以将其重写为

$$[-k_z(c_1 + 1) \sin(k_z d/2) + c_1\kappa \cos(k_z d/2)] [k_z(c_1 + 1) \cos(k_z d/2) + c_1\kappa \sin(k_z d/2)] = 0. \quad (3-13)$$

从方程 (3-13) 的第一个括号项来看, 其实部和虚部为零会导致

$$\begin{aligned} & \left(\eta_1 \cos \frac{d\eta_1}{2} + \eta_2 \sin \frac{d\eta_1}{2} \coth \frac{d\eta_2}{2} \right) (1 + c_1) + c_1\kappa \sin \frac{d\eta_1}{2} = 0, \\ & \left(\eta_1 \sin \frac{d\eta_1}{2} \coth \frac{d\eta_2}{2} - \eta_2 \cos \frac{d\eta_1}{2} \right) (1 + c_1) - c_1\kappa \cos \frac{d\eta_1}{2} \coth \frac{d\eta_2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3-14)$$

从方程 (3-13) 的第二个括号项, 我们发现方程 (3-14) 中的 $\coth(\frac{d\eta_2}{2})$ 被替换为 $\tanh(\frac{d\eta_2}{2})$

$$\begin{aligned} & \left(\eta_1 \cos \frac{d\eta_1}{2} + \eta_2 \sin \frac{d\eta_1}{2} \tanh \frac{d\eta_2}{2} \right) (1 + c_1) + c_1 \kappa \sin \frac{d\eta_1}{2} = 0, \\ & \left(\eta_1 \sin \frac{d\eta_1}{2} \tanh \frac{d\eta_2}{2} - \eta_2 \cos \frac{d\eta_1}{2} \right) (1 + c_1) - c_1 \kappa \cos \frac{d\eta_1}{2} \tanh \frac{d\eta_2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3-15)$$

在这项工作中, 我们关注于厚板情况, 这使我们能够采用 d 很大的极限条件。此时, 当 $\eta_2 > 0$ 时, $\coth(\frac{d\eta_2}{2}) \rightarrow 1$, $\tanh(\frac{d\eta_2}{2}) \rightarrow 1$, 并且方程 (3-14) 和方程 (3-15) 会收敛为相同的形式

$$\left(\eta_1 \cos \frac{d\eta_1}{2} + \eta_2 \sin \frac{d\eta_1}{2} \right) (1 + c_1) + c_1 \kappa \sin \frac{d\eta_1}{2} = 0, \quad (3-16a)$$

$$\left(\eta_1 \sin \frac{d\eta_1}{2} - \eta_2 \cos \frac{d\eta_1}{2} \right) (1 + c_1) - c_1 \kappa \cos \frac{d\eta_1}{2} = 0, \quad (3-16b)$$

从而得到

$$(1 + c_1)\eta_1 = 0. \quad (3-17)$$

根据方程 (3-16), 可以排除 $1 + c_1 = 0$ 这种情况, 所以 $\eta_1 = 0$ 。将 $\eta_1 = 0$ 代入方程 (3-16) 我们得到

$$\eta_2 = -c_1 \kappa / (1 + c_1). \quad (3-18)$$

当 $\eta_2 < 0$ 时, 通过在方程 (3-16) 中用 $-\eta_2$ 替换 η_2 , 该方程仍然成立, 即对于 η_2 的正负值, 有 $\eta_2 = \mp \frac{c_1 \kappa}{1 + c_1}$ 。相应地, 表面铁振子的法向波矢是纯虚数。

$$k_z = \pm i c_1 \kappa / (1 + c_1). \quad (3-19)$$

3.2 表面模式

在这里, 我们推导表面铁振子的色散关系 ω_{κ} 和本征模。将方程 (3-19) 代入方程 (3-10), 我们得到

$$c_2(1 + 2c_1) + \cot^2 \theta_{\kappa} [c_1 c_2 + c_1(1 + c_1)] = 0, \quad (3-20)$$

其中, θ_{κ} 是平面内动量 κ 与饱和极化强度 \mathbf{P}_0 之间的夹角。值得注意的是, 对于单轴铁电绝缘体而言, 劲度差异 $\delta = K_{\parallel} - K_{\perp}$ 通常很小, 例如, 室温下铌酸锂 LiNbO_3

的 $\delta \approx 0.025$ ^[136]。因此，我们可以忽略 δ 的高阶项，进而得到两个表面分支的色散关系。

$$\omega_{\kappa}^+ = \Omega_p \sqrt{(1 + \delta \cos^2 \theta_{\kappa})/2 + K_{\perp}}, \quad (3-21a)$$

$$\omega_{\kappa}^- = \Omega_p \sqrt{\delta \sin^2 \theta_{\kappa} + K_{\perp}}. \quad (3-21b)$$

这些本征频率是有能隙的，并且仅取决于传播方向 θ_{κ} 。然而，表面铁振子并非无色散或非传播的，因为其横向群速度，例如，对于低频支而言

$$\frac{\partial \omega_{\kappa}^-}{\partial \kappa} = \frac{\Omega_p \delta \sin \theta_{\kappa} \cos^2 \theta_{\kappa}}{\kappa \sqrt{K_{\perp} + \delta \sin^2 \theta_{\kappa}}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\Omega_p \delta \sin^2 \theta_{\kappa} \cos \theta_{\kappa}}{\kappa \sqrt{K_{\perp} + \delta \sin^2 \theta_{\kappa}}} \hat{\mathbf{y}} \neq 0. \quad (3-22)$$

我们通过利用方程 (3-11)，根据本征频率 ω_{κ} 求解 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ 来推导表面铁振子激发的本征模。这使得我们能够用 a_z 来重新表示 $\{a_x, a_y\}$ ，表示形式如下

$$a_x = (k_x/k_z)a_z, \quad a_y = c_1 k_y / (c_2 k_z) a_z, \quad (3-23)$$

同时，我们可以用 b_z 来表示 $\{b_x, b_y\}$ ，其表示形式为

$$b_x = -(k_x/k_z)b_z, \quad b_y = -c_1 k_y / (c_2 k_z) b_z. \quad (3-24)$$

将其代入方程 (3-12) 的第一个方程可得到

$$a_z \frac{(c_2 k_x^2 + c_1 k_y^2) - i c_2 \kappa k_z}{\kappa - i k_z} - b_z \frac{(c_2 k_x^2 + c_1 k_y^2) + i c_2 \kappa k_z}{\kappa + i k_z} = 0. \quad (3-25)$$

根据方程 (3-10)，有 $c_2 k_x^2 + c_1 k_y^2 = -c_1 c_2 k^2 - c_2 k_z^2$ 。将其代入方程 (3-25) 后，可得到 a_z 和 b_z 之间的关系：

$$a_z [(1 + c_1)k_z - i c_1 \kappa] + b_z [(1 + c_1)k_z + i c_1 \kappa] = 0. \quad (3-26)$$

对于表面铁振子模式， $k_z = \pm i \frac{c_1 \kappa}{1 + c_1}$ [见方程 (3-60)]。当 $k_z = -i \frac{c_1 \kappa}{1 + c_1}$ 时，由方程 (3-26) 可解得 $a_z = 0$ ，再结合方程 (3-23) 可得 $\mathbf{a} = 0$ ；当 $k_z = i \frac{c_1 \kappa}{1 + c_1}$ 时，根据方程 (3-24) 和 (3-26) 可得 $b_z = 0$ 以及 $\mathbf{b} = 0$ 。这两种解都表明，波以相同的指数衰减形式 [见方程 (3-1)] 局域在上表面附近在这里，我们取 $k_z = -i \frac{c_1 \kappa}{1 + c_1}$ ，并将 $\xi = \frac{c_2 b_y}{k_y}$ 当作一个归一化常数。根据方程 (3-23)，用 ξ 表示出系数 $\{b_x, b_y, b_z\}$

后，我们从方程（3-1）中求出本征模

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x/c_1 \\ k_y/c_2 \\ i\kappa/(1+c_1) \end{pmatrix} \xi e^{-c_1\kappa/(1+c_1)z} e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega\kappa t)}. \quad (3-27)$$

板内相关的电场可由运动方程（3-8）得出，即 $E_{x,z}^{(d)} = \frac{c_1}{\varepsilon_0} p_{x,z}$ 且 $E_y^{(d)} = \frac{c_2}{\varepsilon_0} p_y$ 。将本征模方程（3-27）代入后，我们得到

$$\begin{pmatrix} E_x^{(d)} \\ E_y^{(d)} \\ E_z^{(d)} \end{pmatrix}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} k_x/\varepsilon_0 \\ k_y/\varepsilon_0 \\ i c_1 \kappa / [\varepsilon_0 (1 + c_1)] \end{pmatrix} \xi e^{-c_1\kappa/(1+c_1)z} e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega\kappa t)}. \quad (3-28)$$

由于在没有自由电荷的情况下 $\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}^{(d)} + \mathbf{p}) = 0$ ，因此，这样的电场 [方程（3-28）] 和电极化 [方程（3-27）] 满足体材料中的麦克斯韦方程组。板外 ($z > 0$) 的杂散电场可由库仑积分 [方程（3-4）] 得出

$$\begin{pmatrix} E_x^{(d)} \\ E_y^{(d)} \\ E_z^{(d)} \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} k_x/\varepsilon_0 \\ k_y/\varepsilon_0 \\ i\kappa/\varepsilon_0 \end{pmatrix} \xi e^{-\kappa z} e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega\kappa t)}, \quad (3-29)$$

在没有额外电荷的情况下，有 $\nabla \cdot \mathbf{E}^{(d)} = 0$ 。在表面 ($z = 0$) 处，电场和极化满足边界条件，即 $D_z = \varepsilon_0 E_z^{(d)} + p_z$ 是连续的。

3.3 体模式

在这里，我们通过考虑库仑相互作用来推导体模式。忽略表面反射，并将偶极电场

$$\mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega t)} \begin{pmatrix} -\frac{k_x^2}{k^2} & -\frac{k_x k_y}{k^2} & -\frac{k_x k_z}{k^2} \\ \frac{k_x k_y}{k^2} & -\frac{k_y^2}{k^2} & -\frac{k_y k_z}{k^2} \\ -\frac{k_x k_z}{k^2} & -\frac{k_y k_z}{k^2} & -\frac{k_z^2}{k^2} \end{pmatrix} e^{ik_z z} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

代入到方程 (3-8) 中, $e^{ik_z z}$ 和 $e^{-ik_z z}$ 的系数应当为零, 这会导出特征方程 $c_1 c_2 k^2 + c_1 k_y^2 + c_2 (k_x^2 + k_z^2) = 0$, 或者

$$(\omega/\Omega_p)^4 - (\omega/\Omega_p)^2(1 + K_\perp + K_\parallel) + K_\perp K_\parallel + K_\parallel + (K_\perp - K_\parallel) \cos^2 \theta_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3-31)$$

其中, $\theta_{\mathbf{k}}$ 是传播方向 \mathbf{k} 与饱和电极化方向 \mathbf{P}_0 之间的夹角。通过求解方程 (3-31) 中的频率 ω , 我们可以得到具有色散关系的两个铁振子分支。

$$\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}^+}{\Omega_p}\right)^2 = \frac{1}{2} \left((1 + K_\perp + K_\parallel) + \sqrt{(1 + K_\perp + K_\parallel)^2 - 4(K_\perp K_\parallel + K_\parallel + (K_\perp - K_\parallel) \cos^2 \theta_{\mathbf{k}})} \right), \quad (3-32)$$

$$\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}^-}{\Omega_p}\right)^2 = \frac{1}{2} \left((1 + K_\perp + K_\parallel) - \sqrt{(1 + K_\perp + K_\parallel)^2 - 4(K_\perp K_\parallel + K_\parallel + (K_\perp - K_\parallel) \cos^2 \theta_{\mathbf{k}})} \right). \quad (3-33)$$

由于安德森 - 希格斯机制, 高频分支 $\omega_{\mathbf{k}}^+$ 实际上被提升至体离子等离子体频率 Ω_p , 但低频分支 $\omega_{\mathbf{k}}^-$ 的频率仍保持在低得多的水平。利用室温下铌酸锂 (LiNbO_3) 的材料参数^[136], 我们在图 3.1 中绘制了这两个分支的色散曲线。

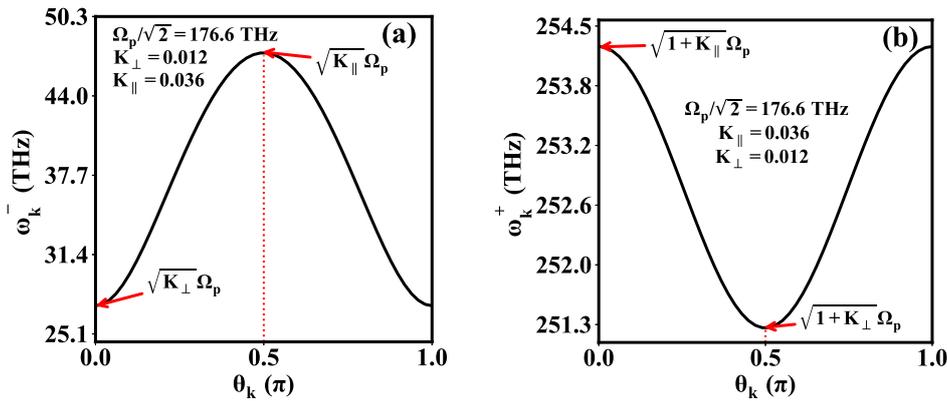


图 3.1 室温下块状铌酸锂 (LiNbO_3) 的两个铁振子分支 $\omega_{\mathbf{k}}^-$ [图 (a)] 和 $\omega_{\mathbf{k}}^+$ [图 (b)] 的色散关系。

将方程 (3-30) 代入方程 (3-8), 我们得到关系 $a_y = c_2 k_x \zeta$ 和 $a_z = c_2 k_z \zeta$,

其中归一化常数 $\zeta \equiv \frac{a_x}{c_2 k_x}$ ，并求解出本征模

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 k_x \\ c_1 k_y \\ c_2 k_z \end{pmatrix} \zeta e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}. \quad (3-34)$$

对于高频分支 $\omega_{\mathbf{k}}^+ \sim \Omega_p$ ，有 $c_1 \sim c_2 \sim -1$ ，因此 $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}$ 表明这是纵波，这与裸等离子体的情况相符。而对于低频分支 $\omega_{\mathbf{k}}^- \ll \Omega_p$ ， $c_1 \sim K_{\perp}$ 且 $c_2 \sim K_{\parallel}$ ，二者在数值大小上相近，使得波同时混合了纵向和横向极化。

3.4 表面铁振子的激发

3.4.1 量子表述

在这里，我们根据量子形式体系推导由外部激光场光斑激发时表面铁振子的激发振幅，这些振幅在正文里用于计算相干泵浦的铁电序。一般来说，铁电极化算符 $\hat{\mathbf{P}}$ 的哈密顿量是动能和势能之和。

$$\hat{H} = \frac{m_p}{2} \int d\mathbf{r} \left| \dot{\hat{\mathbf{P}}}(\mathbf{r}) \right|^2 + V(\hat{\mathbf{p}}), \quad (3-35)$$

其中， $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_0 + \hat{\mathbf{p}}$ ，它由饱和电极化强度 \mathbf{P}_0 和涨落 $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ 组成。当仅考虑表面铁振子时，涨落可通过表面铁振子算符 $\hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 及其相关的本征模 [方程 (3-27)] 进行量子化，即

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}, z) \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}(t) e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}} + \text{H.c.}, \quad (3-36)$$

其中，振幅 $P_x(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{k_x}{c_1} \xi e^{-\frac{c_1 \boldsymbol{\kappa}}{1+c_1} z}$ 、 $P_y(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{k_y}{c_2} \xi e^{-\frac{c_1 \boldsymbol{\kappa}}{1+c_1} z}$ 以及 $P_z(\boldsymbol{\kappa}, z) = i \frac{\boldsymbol{\kappa}}{1+c_1} \xi e^{-\frac{c_1 \boldsymbol{\kappa}}{1+c_1} z}$ 通过归一化因子 ξ 进行归一化。根据简谐振子的规则

$$\frac{m_p}{2} \int d\mathbf{r} \left| \dot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r}) \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hbar \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\dagger} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (3-37)$$

得到

$$\xi = \sqrt{\frac{-\hbar \boldsymbol{\kappa} c_1^3 c_2^2 (1+c_1)}{m_p \omega_{\boldsymbol{\kappa}} [(1+c_1)^2 (c_2^2 k_x^2 + c_1^2 k_y^2) + c_1^2 c_2^2 \boldsymbol{\kappa}^2]}}. \quad (3-38)$$

将低频铁振子色散方程 (3-21b) 代入, 我们得到 $c_1 = -\delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}$, $c_2 = \delta \cos^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}$

$$\xi = \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}} \cos \theta_{\boldsymbol{\kappa}} \delta \left(\frac{\hbar \delta (1 - \delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \varepsilon_0 \Omega_p}{\sqrt{\delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}} + K_{\perp} (1 - 2\delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}} + \delta^2 \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \kappa}} \right)^{-1/2}, \quad (3-39)$$

以及

$$\begin{pmatrix} P_x(\boldsymbol{\kappa}, z) \\ P_y(\boldsymbol{\kappa}, z) \\ P_z(\boldsymbol{\kappa}, z) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} -\kappa / (\delta \sin \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \\ \kappa / (\delta \cos \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \\ i\kappa / (1 - \delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) \end{pmatrix} e^{z/\Delta_{\boldsymbol{\kappa}}}. \quad (3-40)$$

其衰减长度 $\Delta_{\boldsymbol{\kappa}} = (1 - \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}}) / (\kappa \delta \sin^2 \theta_{\boldsymbol{\kappa}})$ 有强烈的各向异性。当施加一个频率为 ω_0 的外部单色电场 $\mathbf{E}^{(e)}$ 时, 表面铁振子的动力学行为由哈密顿量

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hbar \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\dagger} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}} - \int d\mathbf{r} \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}). \quad (3-41)$$

决定。对外部电场进行傅里叶展开, 其展开系数为 $\mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, z)$ 。

$$\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, z) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-i\omega_0 t} + \text{H.c.}, \quad (3-42)$$

我们得到耦合项

$$\int d\mathbf{r} \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = - \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hbar (g(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega_0 t} + h(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega_0 t}) \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}(t) + \text{H.c.}, \quad (3-43)$$

在这里, 耦合常数为

$$g(\boldsymbol{\kappa}) = -(1/\hbar) \int_{-\infty}^0 dz \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}, z) \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, z), \quad (3-44a)$$

$$h(\boldsymbol{\kappa}) = -(1/\hbar) \int_{-\infty}^0 dz \mathbf{P}(-\boldsymbol{\kappa}, z) \cdot \mathbf{E}^*(\boldsymbol{\kappa}, z). \quad (3-44b)$$

表面铁振子的海森堡运动方程可由总哈密顿量推导得出

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hbar \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\dagger} \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}} + [\hbar (g(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega_0 t} + h(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega_0 t}) \hat{a}_{\boldsymbol{\kappa}}(t) + \text{H.c.}], \quad (3-45)$$

在 LKT 方程 $m_p \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{P}}$ 中, 用唯象常数 γ 来表征环境的粘性阻尼, 将其加入到总哈密顿量中。由于,

$$\omega^2 + i\varepsilon_0 \gamma \omega \Omega_p^2 = \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^2. \quad (3-46)$$

铁振子频率 ω_{κ} 会获得一个虚部。对于小阻尼情况, $\tilde{\omega}_{\kappa} = \omega_{\kappa} - i\frac{\varepsilon_0\gamma\Omega_p^2}{2} \equiv \omega_{\kappa} - i\Gamma$, 其中 $\Gamma = \frac{\varepsilon_0\gamma\Omega_p^2}{2}$ 为逆寿命。那么, 海森堡运动方程可写为

$$i\frac{\partial \hat{a}_{\kappa}}{\partial t} = (\omega_{\kappa} - i\Gamma)\hat{a}_{\kappa} + g^*(\kappa)e^{-i\omega_0 t} + h^*(\kappa)e^{i\omega_0 t}. \quad (3-47)$$

通过采用旋波近似 (忽略频率失配的 h 项), 表面铁振子的泵浦振幅可表示为

$$a_{\kappa}(t) \equiv \langle \hat{a}_{\kappa}(t) \rangle = \frac{g^*(\kappa)}{\omega_0 - \omega_{\kappa} + i\Gamma} e^{-i\omega_0 t}. \quad (3-48)$$

将其代入方程 (3-36), 我们可以得到样品表面附近被相干泵浦产生的电极化强度。

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{\kappa} \mathbf{P}(\kappa, z) g^*(\kappa) \frac{e^{i(\kappa \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_0 t)}}{\omega_0 - \omega_{\kappa} + i\Gamma} + \text{H.c.} \quad (3-49)$$

具体而言, 我们关注一个光斑尺寸为 σ 、穿透深度为 1 的激光场光斑, 该激光场沿 $\hat{\mathbf{x}}$ 方向线性偏振。其振幅为 E_0 , 它的傅里叶分量

$$\mathbf{E}(\kappa, z) = \pi E_0 \sigma^2 \exp[-\sigma^2(k_x^2 + k_y^2)/4] \exp(-z^2/l^2) \hat{\mathbf{x}}$$

其波矢贡献范围可达 $1/\sigma$, 因此是宽带的。将其代入方程 (3-44a), 我们可以得到它与下分支表面铁振子的耦合常数。

$$g(\kappa) = \frac{\pi E_0 \sigma^2 \xi \kappa}{\delta \sin \theta_{\kappa} \hbar} \exp[-\sigma^2(k_x^2 + k_y^2)/4] \int_{-\infty}^0 dz e^{-z^2/l^2 + z/\Delta_{\kappa}} = g^*(\kappa), \quad (3-50)$$

这里取该耦合常数为实数。我们通过对公式 (3-49) 中的积分进行数值计算, 来求解被激发的电极化强度。

3.4.2 实空间的激发图案及其参数依赖性

我们展示了在施加频率为 ω_0 的激光场光斑时, 被泵浦的电极化强度在实空间的路由情况, 如正文图 3 (b) 所示。由于下分支铁振子的色散关系仅取决于传播方向, 与 ω_0 共振的铁振子模式会以相对于饱和电极化强度 \mathbf{P}_0 的特定角度 (设为 θ_0) 传播。当 $\Gamma \rightarrow 0$ 时, 我们近似有 $a_{\kappa} \sim g(\kappa) \delta(k_x^2 - \tan^2 \theta_0 k_y^2)$ 。将其代入方程 (3-49), 可得到表面 ($z = 0$) 处被泵浦的电极化强度

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\kappa \mathbf{P}(\kappa, 0) g(\kappa) \delta(k_x^2 - \tan^2 \theta_0 k_y^2) e^{i\kappa \cdot \boldsymbol{\rho}} + \text{H.c.} \quad (3-51)$$

以 p_x 为例。对于耦合常数 $g(\boldsymbol{\kappa})$ ，通过忽略 z 积分中的复杂部分以及归一化常数 ξ ，我们得到

$$p_x(x, y, z = 0) \propto \int dk_x dk_y \frac{\kappa^2}{\sin^2 \theta_\kappa} \exp[-\sigma^2(k_x^2 + k_y^2)/4] \delta(k_x^2 - \tan^2 \theta_0 k_y^2) + \text{H.c.} \quad (3-52)$$

$\delta(k_x^2 - \tan^2 \theta_0 k_y^2)$ 在 $k_x = \pm \tan \theta_0 k_y$ 处存在两个奇点。例如，仅考虑其中一个根 $k_x = \tan \theta_0 k_y$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} p_x(x, y, z = 0) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} dk_y k_y^2 e^{-k_y^2(\tan^2 \theta_0 + 1)\sigma^2/4} e^{ik_y(y + x \tan \theta_0)} + \text{H.c.}, \\ &\propto [-\sigma^2(1 + \tan^2 \theta_0) + 2u^2] e^{-u^2/[\sigma^2(1 + \tan^2 \theta_0)]}, \end{aligned} \quad (3-53)$$

其中，由于高斯因子的存在， $u = \tan \theta_0 y + x$ 以 $\tan \theta_0 y + x = 0$ 为中心。这表明被激发的电极化强度 p_x 沿着以 $y = -\tan \theta_0 x$ 为中心的特定通道分布，通道宽度约为 $\sigma \sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}$ ，该宽度由光斑尺寸决定，且这与波矢满足 $k_y = \frac{1}{\tan \theta_0} k_x$ 的传播方向不同

图 3.2 展示了通过改变激光光斑的激发频率 $\omega_0/(2\pi) = \{5, 6, 7\}$ 太赫兹来灵活调节路由路径的情况。相对于 $\mathbf{P}_0 \parallel \hat{\mathbf{y}}$ 方向的路由方向严格遵循解析解 $|\theta_0| = |\arcsin \sqrt{[(\omega_0/\Omega_p)^2 - K_\perp]/\delta}|$

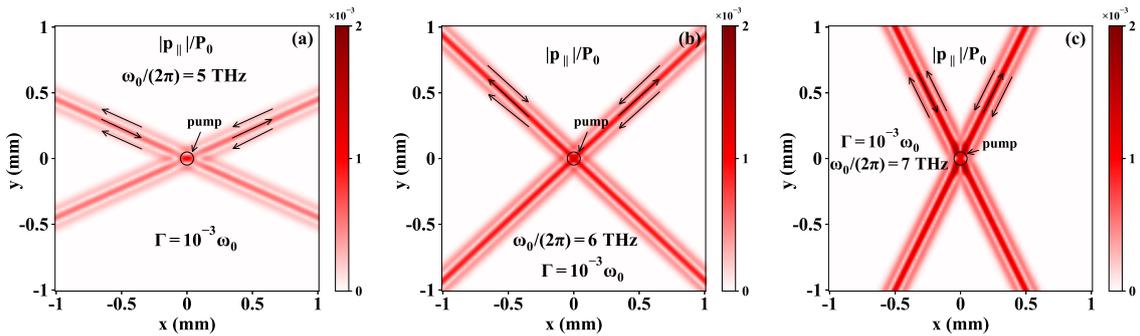


图 3.2 在铌酸锂 (LiNbO_3) 中，通过激光光斑的激发频率 $\omega_0/(2\pi) = \{5, 6, 7\}$ 太赫兹对路由光束进行灵活调谐。阻尼常数取为 $\Gamma = 10^{-3}\omega_0$ ，光斑尺寸 $\sigma = 50$ 微米。正文中使用的其他参数保持不变。黑色箭头表示被激发的电极化强度的方向。

图 3.3 绘制了被泵浦的电极化强度沿路径中心的指数衰减情况。当 $\Gamma = 10^{-3}\omega_0$ 时，衰减长度 L 可达数毫米；而当阻尼常数增大到 $\Gamma = 10^{-2}\omega_0$ 时，衰减长度会减小。

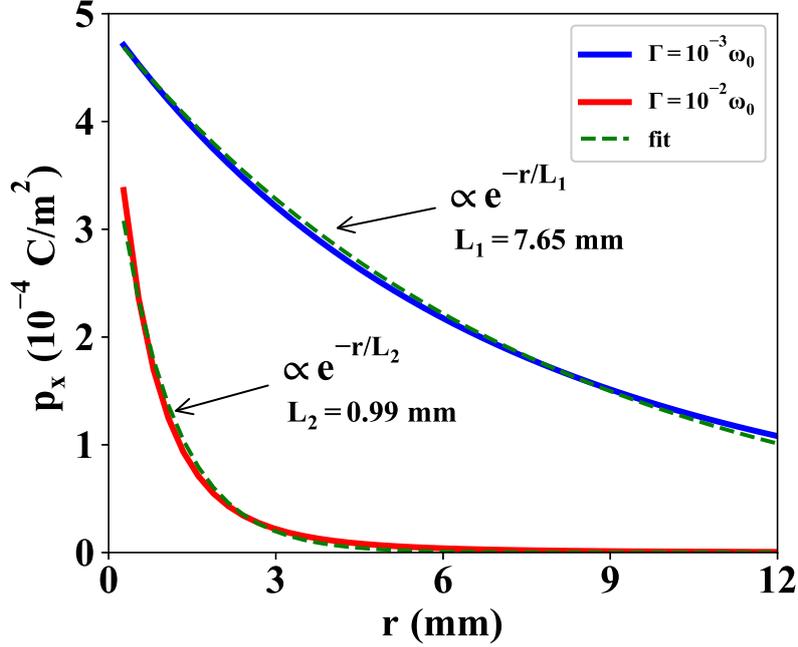


图 3.3 在不同的铁振子阻尼常数 $\Gamma = 10^{-3}\omega_0$ 和 $\Gamma = 10^{-2}\omega_0$ 条件下，被泵浦的电极化强度沿路由路径中心呈指数衰减。激发频率为 $\omega_0/(2\pi) = 7$ 太赫兹。其他参数与正文保持一致。

3.5 朗道自由能中的梯度项

在短波长情况下，朗道泛函中的梯度项变得很重要。此时，自由能密度可表示为

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \frac{g}{2}(\nabla\mathbf{P})^2 + \frac{\alpha}{2}P_y^2 + \frac{\beta}{4}P_y^4 + \frac{\lambda}{2}(P_x^2 + P_z^2) - \frac{1}{2}\mathbf{E}^{(d)} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{E}^{(e)} \cdot \mathbf{P}, \quad (3-54)$$

我们得到性化的 LKT 方程

$$\begin{aligned} (1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_{x,z} + K_{\perp} p_{x,z} + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + k_z^2) p_{x,z} &= \varepsilon_0 E_{x,z}^{(d)}, \\ (1/\Omega_p)^2 \partial_t^2 p_y + K_{\parallel} p_y + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + k_z^2) p_{x,z} &= \varepsilon_0 E_y^{(d)}, \end{aligned} \quad (3-55)$$

这些方程会被额外项 $\varepsilon_0 g(\kappa^2 + k_z^2)\mathbf{p}$ 修正。将偶极场方程(3-7)代入方程(3-55)，两个特征方程变为（详见第 3.1 节）

$$c'_1 c'_2 k^2 + c'_1 k_y^2 + c'_2 (k_x^2 + k_z^2) = 0, \quad (3-56a)$$

$$[(c'_1 + 1)k_z \sin(k_z d/2) - c'_1 \kappa \cos(k_z d/2)][(c'_1 + 1)k_z \cos(k_z d/2) - c'_1 \kappa \sin(k_z d/2)] = 0, \quad (3-56b)$$

其中 $c'_{1,2} = c_{1,2} + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + k_z^2)$, $c_{1,2} = -(\omega/\Omega_p)^2 + K_{\perp,\parallel}$. 一个复数形式的 $k_z = \eta_1 + i\eta_2$ 是方程 (3-56b) 的解。对于较大的厚度 d , 当 $\eta_2 > 0$ 时, $\coth(\frac{d\eta_2}{2}) \rightarrow 1$ 且 $\tanh(\frac{d\eta_2}{2}) \rightarrow 1$. 因此, 从方程 (3-56b) 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 & \left(\eta_1 \cos \frac{d\eta_1}{2} + \eta_2 \sin \frac{d\eta_1}{2} \right) (1 + c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2)) \\
 & + (c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2)) \kappa \sin \frac{d\eta_1}{2} + 2\varepsilon_0 g \eta_1 \eta_2 \left(\eta_1 \sin \frac{d\eta_1}{2} - \eta_2 \cos \frac{d\eta_1}{2} \right) \\
 & - 2\varepsilon_0 g \eta_1 \eta_2 \kappa \cos \frac{d\eta_1}{2} = 0, \\
 & \left(\eta_1 \sin \frac{d\eta_1}{2} - \eta_2 \cos \frac{d\eta_1}{2} \right) (1 + c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2)) \\
 & - (c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2)) \kappa \cos \frac{d\eta_1}{2} - 2\varepsilon_0 g \eta_1 \eta_2 \left(\eta_1 \cos \frac{d\eta_1}{2} + \eta_2 \sin \frac{d\eta_1}{2} \right) \\
 & - 2\varepsilon_0 g \eta_1 \eta_2 g \kappa \sin \frac{d\eta_1}{2} = 0, \tag{3-57}
 \end{aligned}$$

这将导致

$$\eta_1 [(c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2))(1 + c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2)) + 2\varepsilon_0 g \eta_2^2 + (2\varepsilon_0 g \eta_1 \eta_2)^2] = 0. \tag{3-58}$$

梯度系数可被视作一个小量, 例如, 对于铌酸锂 (LiNbO_3) 而言, $g \sim 5.39 \times 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^3/\text{C}^2$. 即便对于一个非常小的激光光斑, 其光斑尺寸 $\sigma \sim 1 \mu\text{m}$, 被激发的铁振子的波矢 $\kappa \lesssim 10^6 \text{ m}^{-1}$, 所以 $\varepsilon_0 g \kappa^2 \sim 10^{-7}$, 这远小于 $|c_1| \sim 0.025 \sin \theta_\kappa$. 然而, 当 $\theta_\kappa \sim 0$ 时, 梯度项似乎始终很重要。对于铌酸锂, $\eta_1 = 0$ 是方程 (3-58) 的唯一解, 因为 $c_1 \sim 10^{-2}$, 且 $\varepsilon_0 g(\kappa^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2) \sim 10^{-6}$ 意味着括号内的式子无解。将 $\eta_1 = 0$ 代入方程 (3-58), 我们得到

$$\eta_2 = \mp \frac{(c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 - \eta_2^2))\kappa}{1 + c_1 + \varepsilon_0 g(\kappa^2 - \eta_2^2)}, \tag{3-59}$$

其中, “+” 和 “-” 分别对应于 $\eta_2 < 0$ 和 $\eta_2 > 0$ 的情况由于 η_2 很小, 我们可以通过迭代法来求解方程 (3-59)

$$k_z = \pm i \frac{(c_1 + \varepsilon_0 g \kappa^2)\kappa}{1 + c_1 + \varepsilon_0 g \kappa^2}. \tag{3-60}$$

在 $|c_1| \gg |\varepsilon_0 g \kappa^2| \gg |\varepsilon_0 g k_z^2|$ 的条件下, 将方程 (3-60) 代入方程 (3-56a) 后, 我们得到

$$k_x^2 (c_2 + \varepsilon_0 g \kappa^2) (1 + 2(c_1 + \varepsilon_0 g \kappa^2))$$

$$+ k_y^2 [(c_1 + \varepsilon_0 g \kappa^2)(c_2 + \varepsilon_0 g \kappa^2) + (c_1 + \varepsilon_0 g \kappa^2)(1 + c_1 + \varepsilon_0 g \kappa^2)] = 0, \quad (3-61)$$

其中 $c_2 = c_1 + \delta$ 。在小量 δ 的主导阶近似下，下铁振子分支的色散关系现在可表示为

$$\omega_{\kappa}^- = \Omega_p \sqrt{\delta \sin^2 \theta_{\kappa} + K_{\perp} + \varepsilon_0 g \kappa^2}. \quad (3-62)$$

如在图 3.4 中针对铌酸锂 (LiNbO_3) 所绘制的那样，在短波长区域，梯度项明显影响了铁振子的色散关系。这些结果还表明，我们可以通过使用聚焦性更好的激发源来加速表面铁振子。

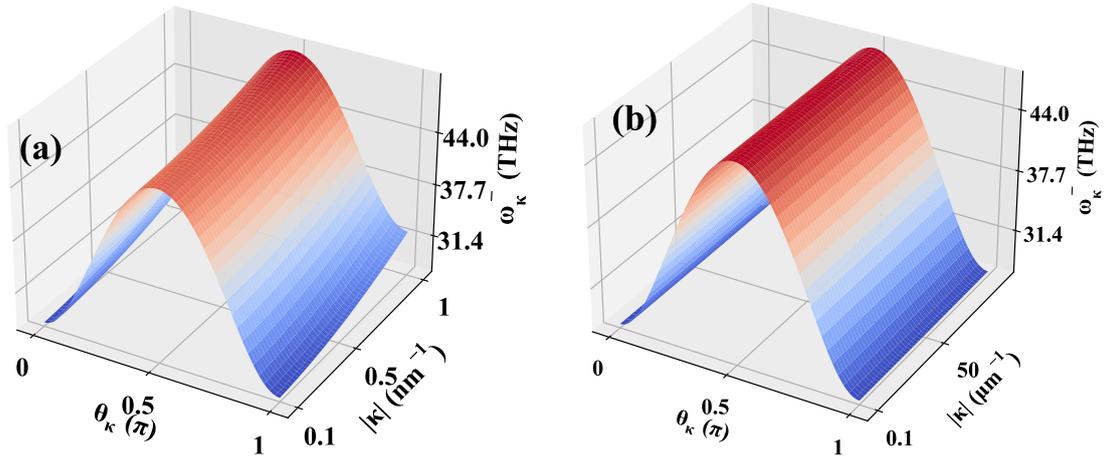


图 3.4 如图 (a) 所示，在大波数情况下，梯度项对铌酸锂 (LiNbO_3) 表面铁振子色散的影响不可忽略；但在长波长极限下，如图 (b) 所示，这种影响会消失。